Задача: Използвайте следната функция на Лагранж $L = \frac{1}{2}mv^2 - q\varphi + q\vec{v}.\vec{A}$ за електромагнитно поле и уравнения на Лагранж –Ойлер за да получите силата на Лоренц $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right)$ за частица с маса m и заряд q, която се движи в електромагнитно поле със скорост $\vec{v}$.

Решение: От силата на Лоренц $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right)$ и закона на Нютон следва:

$$m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B} \tag{1}$$

от друга страна за електричният и магнитният потенциал имаме

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} &= \vec{\nabla}\times\vec{A}\end{aligned} \tag{2a}$$

тогава за x-тата компонента на силата имаме :

$$m\frac{d\vec{v}_x}{dt} = q\vec{E}_x + q\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)_x = q\vec{E}_x + q\left(v_zB_y - v_yB_z\right) \tag{3}$$

или като отчетем $E_x = -q\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial t}\right)$, $B_y = \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}$ и $B_z = \frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x}$ получаваме:

$$m\frac{dv_x}{dt} = -q\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial t}\right) + q\left[v_z\left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right) - v_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x}\right)\right] \tag{4}$$

от друга страна от уравнения на Лагранж –Ойлер за x-тата променлива имаме

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v_x}\right) = \frac{\partial L}{\partial x} \tag{5}$$

или отчитайки, че $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ и $\vec{v}.\vec{A} = v_xA_x + v_yA_y + v_zA_z$ следва

$$\frac{\partial L}{\partial v_x} = mv_x + qA_x \tag{6}$$

тогава

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v_x}\right) = \frac{d}{dt}\left(mv_x + qA_x\right) = m\frac{dv_x}{dt} + q\frac{dA_x}{dt} \tag{7}$$

сега отчитаме, че $A_x\left(x, y, z, t\right) \Rightarrow$

$$\frac{dA_x}{dt} = \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial A_x}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial A_x}{\partial z} + \frac{\partial A_x}{\partial t} \tag{8}$$

тогава лявата страна на уравнение на Лагранж –Ойлер е

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v_x}\right) = m\frac{dv_x}{dt} + q\left(v_x\frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial A_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial A_x}{\partial z} + \frac{\partial A_x}{\partial t}\right) \tag{9}$$

за дясната страна на уравнение на Лагранж –Ойлер имаме

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -q\frac{\partial\varphi}{\partial x} + q\left(v_x\frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z\frac{\partial A_z}{\partial x}\right) \tag{10}$$

Тогава окончателно за уравнение на Лагранж –Ойлер имаме

$$m\frac{dv_x}{dt} = -q\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial t}\right) + q\left[v_z\left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right) - v_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x}\right)\right] \tag{11}$$

което съвпада с уравнение 4, по аналогия се прави и за другите две компоненти (компоненти y и z).