Електродинамика

Андон Рангелов, кабинет В 40, email: rangelov@phys.uni-sofia.bg, интернет страница на курса `http://ed.quantum-bg.org/`

Във вакуум, без заряди и токове уравненията на Максуел преминават в по-симетрична форма:

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = 0, \quad (Gauss's\ law) \tag{1а}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0, \quad (Gauss's\ law\ for\ magnetism) \tag{1б}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \quad (Faraday's\ law) \tag{1в}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}, \quad (Ampere's\ law) \tag{1г}$$

Задачи:

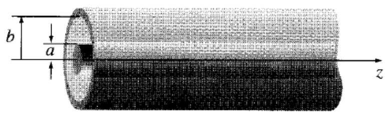
1.1 Покажете, че TEM вълна (напречна електрична и напречна магнитна вълна) от вида (записана в цилиндрични координати):

$$\vec{E}\left(r,\alpha,z,t\right)=\left[\frac{A\cos\left(kz-\omega t\right)}{r},0,0\right], \qquad \vec{B}\left(r,\alpha,z,t\right)=\left[0,\frac{A\cos\left(kz-\omega t\right)}{rc},0\right],$$

може да се разпространява в коаксиален и безкрайно дълъг вълновод показан на Фигура **??**. Приемете, че стените на вълновода (вътрешният радиус е a а външният е b) са идеали проводници.

Упътване: може да използвате следните операции в цилиндрични координати:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}.\vec{E} &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rE_r\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial E_\alpha}{\partial\alpha}+\frac{\partial E_z}{\partial z};\\
\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_r &= \frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial\alpha}-\frac{\partial E_\alpha}{\partial z};\\
\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_\alpha &= \frac{\partial E_r}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial r};\\
\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_z &= \frac{1}{r}\frac{\partial\left(rE_\alpha\right)}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial E_r}{\partial\alpha};
\end{aligned}$$



Фигура 1:

1.2

За предишната задача сметнете каква ще е повърхнината плътност на зарядите върху вътрешният проводник с радиус a, както и тока който тече по него.

1.3

Както сигурно вече сте забелязали, уравненията на Максуел във вакуум без заряди и токове са доста симетрични. Симетрията се нарушава, когато имаме заряди и токове. Това нямаше да е така ако в природата съществуват магнитни заряди (магнитни монополи) тогава уравнeният на Максуел щяха да придобият симетричната форма от вида:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}.\vec{E} &= \frac{\rho_e}{\varepsilon_0}, \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\mu_0\vec{j}_m-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},\\
\vec{\nabla}.\vec{B} &= \mu_0\rho_m, \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}_e+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t},
\end{aligned}$$

Можете ли да напишете закон аналогичен на закона на Кулон за случай на магнитни заряди. А как ще изглежда силата на Лоренц, ако съществуват магнитни заряди.

1.4

Намерете:

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right)=?$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) = ?$$

1.5

Покажете, че магнитното поле на магнитен монопол трябва да е от вида:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 q_m}{4\pi r^3}\vec{r} - \frac{\mu_0 q_m \delta(\vec{r})}{3}\vec{r}$$

за да се удовлетворява закона на Гаус в магнетизма ($\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0$). Реална физична ситуация, в която имаме такова поле е магнитното поле в близост до върхът на дълъг пирон, или дълъг и тънък прав соленоид.

1.6

Ако вектор потенциал на магнитен дипол е

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\vec{m} \times \frac{\vec{r}}{r^3} \right),$$

където $\vec{m}$ е магнитният момент на дипола. То намерете магнитното поле $\vec{B}(\vec{r})$ на магнитният дипол ($\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r})$и $\vec{B}(\vec{r})$ трябва да удовлетворява закона на Гаус за магнитното поле $\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0$).

1.7

Използвайки резултата от предишната лекция за надлъжната компонента на плоска вълна която се разпространява в дълъг вълновод:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - k^2 \right] E_{0z}(x, y) = 0, \qquad \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - k^2 \right] B_{0z}(x, y) = 0,$$

Или в цилиндрични координати:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E_{0z}(r, \alpha)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_{0z}(r, \alpha)}{\partial \alpha^2} + \left(\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - k^2 \right) E_{0z}(r, \alpha) = 0.$$

Намерете TM решението за цилиндричен безкрайно дълъг вълновод с иделано проводящи стени.

Решения:

1.1

Вълна от вида:

$$\begin{aligned}\vec{E}(r,\alpha,z,t) &= \left[\frac{A\cos(kz-\omega t)}{r},0,0\right],\\ \vec{B}(r,\alpha,z,t) &= \left[0,\frac{A\cos(kz-\omega t)}{rc},0\right],\end{aligned}$$

може да се разпространява във вълновода ако удовлетворява уравненията на Максуел във вакуум заедно с граничните условия. Проверяваме $\vec{\nabla}.\vec{E}$ и $\vec{\nabla}.\vec{B}$:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}.\vec{E} &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rE_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial E_\alpha}{\partial \alpha}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rE_r)=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{A\cos(kz-\omega t)}{r}\right)=0\\ \vec{\nabla}.\vec{B} &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial B_\alpha}{\partial \alpha}+\frac{\partial B_z}{\partial z}=\frac{1}{r}\frac{\partial B_\alpha}{\partial \alpha}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{A\cos(kz-\omega t)}{rc}\right)=0\end{aligned}$$

сега проверяваме и другите две уравнения на Максуел. От $\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_r &= \frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial \alpha}-\frac{\partial E_\alpha}{\partial z}=0, \quad \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)_r=0,\\ \left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_\alpha &= \frac{\partial E_r}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial r}=-\frac{kA\sin(kz-\omega t)}{r}, \quad \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)_\alpha=-\frac{\omega A\sin(kz-\omega t)}{rc},\\ \left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_z &= \frac{1}{r}\frac{\partial(rE_\alpha)}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial E_r}{\partial \alpha}=0, \quad \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)_z=0,\end{aligned}$$

а от $\vec{\nabla}\times\vec{B}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)_r &= \frac{1}{r}\frac{\partial B_z}{\partial \alpha}-\frac{\partial B_\alpha}{\partial z}=-\frac{kA\sin(kz-\omega t)}{rc}, \quad \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)_r=-\frac{\omega A\sin(kz-\omega t)}{rc^2},\\ \left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)_\alpha &= \frac{\partial B_r}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial r}=0, \quad \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)_\alpha=0,\\ \left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)_z &= \frac{1}{r}\frac{\partial(rB_\alpha)}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial B_r}{\partial \alpha}=0, \quad \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)_z=0,\end{aligned}$$

последните две системи се удовлетворяват когато $k=\omega/c$. Граничните условия на повърхността на вътрешният и външният проводник са:

$$\begin{aligned}E^{\parallel} &= E_z(a,\alpha)=E_z(b,\alpha)=0,\\ B^{\perp} &= B_r(a,\alpha)=B_r(b,\alpha)=0,\end{aligned}$$

Които също се удовлетворяват.

1.2

Знаем, че електричното поле по условието на предишната задача е само радиално и е $E_r=r^{-1}A\cos(kz-\omega t)$, така че нека приложим теоремата на Гаус в интегрална форма за повърхнина цилиндър с радиус $r\Rightarrow$

$$\oint\!\!\!\oint \overrightarrow{E}.d\overrightarrow{S}=\frac{q}{\varepsilon_0}\Leftrightarrow 2\pi A\cos(kz-\omega t)\,l=\frac{\sigma l}{\varepsilon_0}\Rightarrow\sigma=2\pi\varepsilon_0 A\cos(kz-\omega t)\,.$$

за да намерим тока, който тече по вътрешният проводник прилагаме закона на Ампер за цилиндър с радиус $r\Rightarrow$

$$\oint \overrightarrow{B}.d\overrightarrow{l}=\mu_0 I\Leftrightarrow\frac{A\cos(kz-\omega t)}{rc}2\pi r=\mu_0 I\Rightarrow I=\frac{2\pi A\cos(kz-\omega t)}{\mu_0 c}.$$

Обърнете внимание, че в последното уравнение тока на отместване на Максуел през така избраният контур е нула понеже електричното поле има само радиална посока.

Заряда и тока на външната стена на вълновода са точно противоположни на тези на вътрешните. Задачата може да се реши от граничните условия за тока и за повърхностният заряд върху металните повърхности:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 E^{\perp} &= \sigma, \\ \frac{B^{\parallel}}{\mu_0} &= j. \end{aligned}$$

1.3

Задачата е само за проверка на вашата физична интуиция.

От закона на Кулон имаме:

$$F_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_{e1}q_{e2}}{r^2}$$

$\Rightarrow$ магнитният аналог ще е:

$$F_m = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_{m1}q_{m2}}{r^2}$$

За Лоренцовата сила имаме:

$$\vec{F} = q_e\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right) + q_m\left(\vec{B} - \frac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{E}\right)$$

1.4

смятаме отделно

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\nabla\left(r\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \Delta\left(\frac{1}{r}\right) &= \nabla\cdot\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \nabla\cdot\left(-\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = -\frac{\nabla\cdot\vec{r}}{r^3} - \vec{r}\cdot\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right) = \\ &= -\frac{3}{r^3} + \frac{3\vec{r}}{r^4}\cdot\nabla\left(r\right) = -\frac{3}{r^3} + \frac{3\vec{r}}{r^4}\cdot\frac{\vec{r}}{r} = 0 \end{aligned}$$

нека да проверим дали наистина $\nabla\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = 0$, за целта да използваме теоремата на Гаус от анализа и интегрираме върху сфера с радиус R:

$$\int\nabla\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)dV = \oiint\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)\cdot d\vec{S} = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\frac{\vec{r}}{r}R^2\sin\theta d\theta d\varphi = 2\pi\int_0^{\pi}\frac{R^2}{r^2}\sin\theta d\theta = 4\pi\frac{R^2}{r^2}$$

сега нека да изберем $r = R \to 0 \Rightarrow$

$$\int\nabla\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)dV = 4\pi = \int 4\pi\delta\left(\vec{r}\right)dV$$

$\Rightarrow$

$$\nabla\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = 4\pi\delta\left(\vec{r}\right)$$

$\Rightarrow$

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta\left(\vec{r}\right)$$

1.5

ако използваме следният резултата от предишната задача:

$$\nabla\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = 4\pi\delta\left(\vec{r}\right)$$

виждаме, че за да се удовлетвори теоремата на Гаус за магнитното поле ($\nabla\cdot\vec{B}\left(\vec{r}\right) = 0$ или в интегрална форма $\oiint\vec{B}\left(\vec{r}\right)\cdot d\vec{S} = 0$) то в полето $\vec{B}\left(\vec{r}\right)$ трябва да има член от вида

$$-\frac{\mu_0 q_m\delta\left(\vec{r}\right)}{3}\vec{r},$$

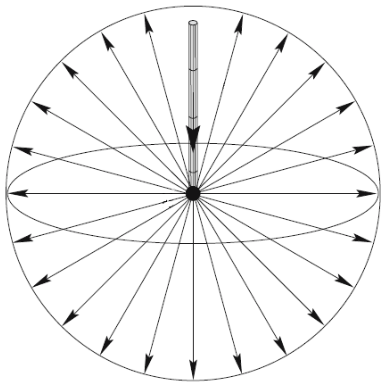
който да компенсира точно потока на магнитното поле създаден от магниятния монопол с поле:

$$\frac{\mu_0 q_m}{4\pi r^3}\vec{r}.$$

$\Rightarrow$ Магнитното поле трябва да е от вида:

$$\vec{B}\left(\vec{r}\right)=\frac{\mu_0 q_m}{4\pi r^3}\vec{r}-\frac{\mu_0 q_m \delta\left(\vec{r}\right)}{3}\vec{r}$$

тогава последното поле отговаря не на единичен и изолиран магнитен монопол а на поле от полубезкраен и много тънък соленоид. Разбира се формата на този соленоид не е фиксирана и той може да е както прав така и да има всякаква форма: това е така наречената струна на Дирак (фиг. 2)).



Фигура 2:

1.6

понеже $\vec{B}\left(\vec{r}\right)=\nabla\times\vec{A}\left(\vec{r}\right)\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\vec{B}\left(\vec{r}\right) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\left(\vec{m}\times\frac{\vec{r}}{r^3}\right)=\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\vec{m}\nabla.\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)-\vec{m}.\nabla\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)\right]=\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{\vec{m}}{r^3}\underbrace{\nabla.\vec{r}}_{=3}+\vec{m}\vec{r}.\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right)-\frac{\vec{m}}{r^3}.\underbrace{\nabla\left(\vec{r}\right)}_{=\hat{1}}-\vec{m}.\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right)\vec{r}\right]= \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{2\vec{m}}{r^3}+\vec{m}\vec{r}.\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right)-\vec{m}.\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right)\vec{r}\right]\end{aligned}$$

обаче

$$\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right)=\frac{3}{r^2}\nabla\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{3}{r^2}\left(-\frac{\vec{r}}{r^3}\right)=-\frac{3\vec{r}}{r^5}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\vec{B}\left(\vec{r}\right) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{2\vec{m}}{r^3}+\vec{m}\vec{r}.\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right)-\vec{m}.\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right)\vec{r}\right]=\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{2\vec{m}}{r^3}+\vec{m}\vec{r}.\left(-\frac{3\vec{r}}{r^5}\right)-\vec{m}.\left(-\frac{3\vec{r}}{r^5}\right)\vec{r}\right]= \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[-\frac{\vec{m}}{r^3}+\frac{3\vec{m}.\vec{r}}{r^5}\vec{r}\right]=\frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left[\left(3\vec{m}.\frac{\vec{r}}{r}\right)\frac{\vec{r}}{r}-\vec{m}\right]\end{aligned}$$

остава да заместим $\vec{B}\left(\vec{r}\right)$ в $\nabla\cdot\vec{B}\left(\vec{r}\right)=0$ за да проверим дали така намереното поле удовлетворява закона на Гаус за магнетизма.

1.7

Понеже имаме идеален проводник то електричното и магнитното поле в проводника за нула и имаме следните гранични условия на повърхността на проводника:

$$E^{\parallel}=0\Rightarrow E_{0z}\left(a,\alpha\right)=0$$

Търсим да решим ТМ вълна следователно имаме уравнението:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial E_{0z}\left(r,\alpha\right)}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 E_{0z}\left(r,\alpha\right)}{\partial\alpha^2}+\left(\left(\frac{\omega}{c}\right)^2-k^2\right)E_{0z}\left(r,\alpha\right)=0=0.$$

Решаваме го с разделяне на променливите, като положим $E_{0z}(r,\alpha) = R(r)\Theta(\alpha) \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\Theta(\alpha)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right) + R(r)\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Theta(\alpha)}{\partial\alpha^2} + R(r)\Theta(\alpha)\left(\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2\right)E_{0z}(r,\alpha) &= 0 \Rightarrow \\
\frac{r}{R(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right) + \underbrace{\frac{1}{\Theta(\alpha)}\frac{\partial^2\Theta(\alpha)}{\partial\alpha^2}}_{=-n^2} + r^2\left(\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2\right) &= 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial^2\Theta(\alpha)}{\partial\alpha^2} + n^2\Theta(\alpha) = 0$$

$\Rightarrow \Theta(\alpha) = C\sin(n\alpha + \alpha_0)$ но трябва да имаме периодичност по $\alpha \Rightarrow \Theta(\alpha) = \Theta(\alpha + 2\pi) \Rightarrow$

$$\sin(n\alpha + \alpha_0) = \sin(n(\alpha + 2\pi) + \alpha_0) = \sin(n\alpha + \alpha_0)\cos(2\pi n) + \cos(n\alpha + \alpha_0)\sin(2\pi n)$$

$\Rightarrow n = 0, 1, 2... \Rightarrow$

$$\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial R(r)}{\partial r} + \left(\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)R(r) = 0$$

Ако сега сменим променливата $r = x/\beta$, $\beta^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2 \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\beta^2\frac{d^2R(x)}{dx^2} + \beta^2\frac{1}{x}\frac{dR(x)}{dx} + \left(\beta^2 - \frac{\beta^2 n^2}{x^2}\right)R(x) &= 0 \Leftrightarrow \\
x^2\frac{d^2R(x)}{dx^2} + x\frac{dR(x)}{dx} + \left(x^2 - n^2\right)R(x) &= 0
\end{aligned}$$

Последното уравнение е уравнение на Бесел, чиито решение е
`http://mathworld.wolfram.com/BesselDifferentialEquation.html`

$$R(x) = AJ_n(x) + BY_n(x),$$

или

$$R(r) = AJ_n\left(r\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2}\right) + BY_n\left(r\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2}\right),$$

където $J_n(x)$ и $Y_n(x)$ са функции на Бесел от първи и втори род. Понеже $Y_n\left(r\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2}\right) \to \infty$ когато $r \to 0$ то $\Rightarrow B = 0 \Rightarrow$

$$E_{0z}(r,\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n J_n\left(r\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2}\right)\sin(n\alpha + \alpha_0)$$

а от граничното условие $E_{0z}(a,\alpha) = 0 \Rightarrow J_n\left(a\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2}\right) = 0 \Rightarrow x_{nm} = a\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2}$, където x_{nm} са корените на уравнението $J_n(x) = 0$. Тогава за дисперсионното уравнение имаме:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{x_{nm}^2}{a^2}$$