Електродинамика

Андон Рангелов, кабинет В 39, email: rangelov@phys.uni-sofia.bg, интернет страница на курса `http://ed.quantum-bg.org/`

Досега разгледахме теорема на Гаус за електричното и магнитното поле:
Потока на електричното поле през затворена повърхност е равен на алгебричната сума на зарядите затворени от повърхността разделен на ε_0 – $\oiint \overrightarrow{E}.d\overrightarrow{S} = q/\varepsilon_0$;
Потока на магнитното поле през затворена повърхност е нула – $\oiint \overrightarrow{B}.d\overrightarrow{S} = 0$.

Както и теоремите за циркулацията на електричното и магнитното поле:
Циркулацията на електричното поле по произволен затворен контур е нула – $\oint \overrightarrow{E}.d\overrightarrow{l} = 0$;
Циркулацията на магнитното поле по произволен затворен контур е равна на произведението на магнитната възприемчивост във вакуум и алгебричната сума на токовете пресичащи контура – $\oint \overrightarrow{B}.d\overrightarrow{l} = \mu_0 I$.

Тези уравнения записахме и в диференциална форма:

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{1а}$$
$$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0, \tag{1б}$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0, \tag{1в}$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{j}. \tag{1г}$$

Оказва се, че когато имаме променливи електрично и магнитно поле тези уравнения се модифицират до уравнения на Максуел:

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{2а}$$
$$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0, \tag{2б}$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \tag{2в}$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}, \tag{2г}$$

Във вакуум, без заряди и токове уравненията на Максуел преминават в по-симетрична форма:

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = 0, \tag{3а}$$
$$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0, \tag{3б}$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \tag{3в}$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}, \tag{3г}$$

Задачи:

1.1

Използвайки уравненията на Максуел във вакуум (уравнения (3)) покажете, че електричното и магнитното поле удовлетворяват вълнови уравнения от вида:

$$\Delta f = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \tag{4}$$

1.2

Използвайки резултата от предишната задача покажете, че плоска и монохроматична вълна от вида:

$$\vec{E}(z,t) = \vec{E}_0 \exp\left[i\left(kz-\omega t\right)\right],$$
$$\vec{B}(z,t) = \vec{B}_0 \exp\left[i\left(kz-\omega t\right)\right],$$

където ω е честотата на вълната а z е посоката на разпространение на вълната, е решение на уравненията на Максуел във вакуум.

1.3

Покажете, че сферична вълна от вида:

$$\vec{E}\left(r,\vartheta,\phi,t\right)=\vec{A}\frac{\sin\vartheta}{r}\left[\cos u-\frac{1}{kr}\sin u\right],$$

където $u=kr-\omega t$, $\omega/k=c$ и вектора $\vec{A}$ е:

$$\vec{A}=\left(0,0,A_0\right)$$

Удовлетворява всички четири уравнения на Максуел във вакуум и намерете магнитното поле което съответства на това електрично поле.

Упътване: работете в сферични координати и използвайте, че:

$$\vec{\nabla}.\vec{E}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2E_r\right)+\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(E_\vartheta\sin\vartheta\right)+\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial E_\phi}{\partial\phi};$$

$$\begin{aligned}\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_r &= \frac{1}{r\sin\vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(E_\phi\sin\vartheta\right)-\frac{\partial E_\vartheta}{\partial\phi}\right];\\ \left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_\vartheta &= \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial E_r}{\partial\phi}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rE_\phi\right);\\ \left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_\phi &= \frac{1}{r}\frac{\partial\left(rE_\vartheta\right)}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial E_r}{\partial\vartheta};\end{aligned}$$

1.4

Покажете, че плоски и монохроматични вълни които се разпространяват по посока на z във вълновод с идеални метални стени и имат вида:

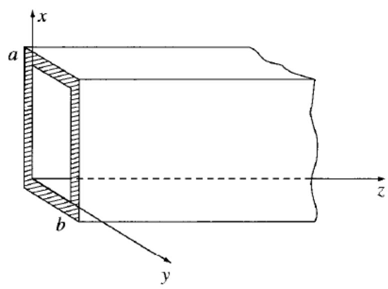
$$\begin{aligned}\vec{E}\left(x,y,z,t\right) &= \vec{E}_0\left(x,y\right)\exp\left[i\left(kz-\omega t\right)\right]\\ \vec{B}\left(x,y,z,t\right) &= \vec{B}_0\left(x,y\right)\exp\left[i\left(kz-\omega t\right)\right]\end{aligned}$$

трябва да удовлетворяват следните уравнения:

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\left(\frac{\omega}{c}\right)^2-k^2\right]E_{0z} &= 0\\ \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\left(\frac{\omega}{c}\right)^2-k^2\right]B_{0z} &= 0\end{aligned}$$

1.5

Използвайки резултата от предишната задача, решете задачата за разпространение на TE вълни в правоъгълен вълновод (фиг.1).



Фигура 1:

Решения:

От уравнията на Максуел във вакуум (3) взимаме ротация на уравнение (3в) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right) &= \vec{\nabla}\underbrace{\left(\vec{\nabla}.\vec{E}\right)}_{=0}-\Delta\vec{E}=\vec{\nabla}\times\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)\Rightarrow\\ \vec{\nabla}\times\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) &= -\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)=-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=-\Delta\vec{E}\Rightarrow\\ \Delta\vec{E} &= \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}.\end{aligned}$$

Аналогично за магнитното поле ако вземем ротация на уравнение (3г) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right) &= \vec{\nabla}\underbrace{\left(\vec{\nabla}.\vec{B}\right)}_{=0}-\Delta\vec{B}=\vec{\nabla}\times\left(\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)\Rightarrow\\ \vec{\nabla}\times\left(\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) &= \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)=-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=-\Delta\vec{B}\Rightarrow\\ \Delta\vec{B} &= \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}.\end{aligned}$$

Значи сега имаме отделни уравнения за електричното и за магнитното поле

$$\begin{aligned}\Delta\vec{E} &= \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2},\\ \Delta\vec{B} &= \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}.\end{aligned}$$

разбира се те са диференциални уравнения от втори ред, за разлика от уравненията на Максуел. Тези уравнения са вълнови уравнения от вида на:

$$\Delta f=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

със скорост $v=c=1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$

1.2

От предишната задача получихме следните уравнения:

$$\begin{aligned}\Delta\vec{E} &= \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2},\\ \Delta\vec{B} &= \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2},\end{aligned}$$

които изведохме от уравненията на Максуел във вакуум $\Rightarrow$ всяко решение на уравненията на Максуел във вакуум трябва да е решение и на горните две уравнения, но не и обратното. Проверяваме дали плоска и монохроматична вълна с честота ω разпространяваща се в посока z:

$$\begin{aligned}\vec{E}(z,t) &= \vec{E}_0\exp\left[i\left(kz-\omega t\right)\right],\\ \vec{B}(z,t) &= \vec{B}_0\exp\left[i\left(kz-\omega t\right)\right]\end{aligned}$$

е решение на вълновите уравнения $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}-k^2\begin{pmatrix}E_{0x}\\E_{0y}\\E_{0z}\end{pmatrix} &= -\mu_0\varepsilon_0\omega^2\begin{pmatrix}E_{0x}\\E_{0y}\\E_{0z}\end{pmatrix}\\ -k^2\begin{pmatrix}B_{0x}\\B_{0y}\\B_{0z}\end{pmatrix} &= -\mu_0\varepsilon_0\omega^2\begin{pmatrix}B_{0x}\\B_{0y}\\B_{0z}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ са решения когато $k^2 = \omega^2/c^2$. За да са и решения на уравненията на Максуел то трябва да ги удовлетворяват:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}.\vec{E} &= 0, \\
\vec{\nabla}.\vec{B} &= 0, \\
\vec{\nabla}\times\vec{E} &= -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \\
\vec{\nabla}\times\vec{B} &= \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.
\end{aligned}$$

Първите две уравнения ни дават $E_{0Z} = 0$ и $B_{0Z} = 0$ (във вакуум електромагнитната вълна е напречна). Да разгледаме сега третото уравнение като първо сметнем лявата и дясната част отделно $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\times\vec{E} &= \begin{vmatrix} \mathsf{e}_x & \mathsf{e}_y & \mathsf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & 0 \end{vmatrix} = -ikE_{0y}\exp\left[i\left(kz-\omega t\right)\right]\mathsf{e}_x + ikE_{0x}\exp\left[i\left(kz-\omega t\right)\right]\mathsf{e}_y + 0\mathsf{e}_z \\
-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} &= i\omega B_{0x}\exp\left[i\left(kz-\omega t\right)\right]\mathsf{e}_x + i\omega B_{0y}\exp\left[i\left(kz-\omega t\right)\right]\mathsf{e}_y + 0\mathsf{e}_z
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
-kE_{0y} &= \omega B_{0x} \\
kE_{0x} &= \omega B_{0y}
\end{aligned}$$

които равенства можем да запишем с едно векторно равенство от вида:

$$\vec{B}_0 = \frac{k}{\omega}\left(\mathsf{e}_z\times\vec{E}_0\right)$$

което значи, че магнитното поле е перпендикулярно на електричното поле.

1.3

Нека първо да покажем, че $\vec{\nabla}.\vec{E} = 0$ за сферични координати имаме:

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\underbrace{E_r}_{=0}\right) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\underbrace{E_\vartheta}_{=0}\sin\vartheta\right) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial E_\phi}{\partial\phi} = \frac{1}{r\sin\vartheta}\underbrace{\frac{\partial E_\phi}{\partial\phi}}_{=0} = 0$$

след което нека ползваме уравнение $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ за да намерим магнитното поле $\vec{B}$

$$\begin{aligned}
-\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)_r &= \left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_r = \frac{1}{r\sin\vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(E_\phi\sin\vartheta\right) - \underbrace{\frac{\partial E_\vartheta}{\partial\phi}}_{=0}\right] = \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(E_\phi\sin\vartheta\right) \\
-\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)_\vartheta &= \left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_\vartheta = \frac{1}{r\sin\vartheta}\underbrace{\frac{\partial E_r}{\partial\phi}}_{=0} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rE_\phi\right) = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rE_\phi\right) \\
-\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)_\phi &= \left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_\phi = \frac{1}{r}\underbrace{\frac{\partial\left(rE_\vartheta\right)}{\partial r}}_{=0} - \frac{1}{r}\underbrace{\frac{\partial E_r}{\partial\vartheta}}_{=0} = 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
-\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)_r &= \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(A_0\frac{\sin^2\vartheta}{r}\left[\cos u - \frac{1}{kr}\sin u\right]\right) = \frac{2A_0\cos\vartheta}{r^2}\left(\cos u - \frac{1}{kr}\sin u\right) \\
-\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)_\vartheta &= -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rE_\phi\right) = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(A_0\sin\vartheta\left[\cos\left(kr-\omega t\right) - \frac{1}{kr}\sin\left(kr-\omega t\right)\right]\right) = \frac{A_0\sin\vartheta}{r}\left(k\sin u + \frac{1}{r}\cos u - \frac{1}{kr^2}\sin u\right) \\
-\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)_\phi &= 0
\end{aligned}$$

след интегриране по времето и отчитайки, че:

$$\begin{aligned}\int \cos u dt &= -\frac{1}{\omega}\sin u\\ \int \sin u dt &= \frac{1}{\omega}\cos u\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}B_r &= \frac{2A_0\cos\vartheta}{\omega r^2}\left(\sin u + \frac{1}{kr}\cos u\right)\\ B_\vartheta &= \frac{A_0\sin\vartheta}{\omega r}\left(-k\cos u + \frac{1}{r}\sin u + \frac{1}{kr^2}\cos u\right)\\ B_\phi &= const\end{aligned}$$

Нека сега да проверим, че $\vec{\nabla}.\vec{B} = 0$. Отново работим в сферични координати:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}.\vec{B} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 B_r\right) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(B_\vartheta\sin\vartheta\right) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\underbrace{\frac{\partial B_\phi}{\partial\phi}}_{=0} =\\ &= \frac{1}{r^2}\frac{2A_0\cos\vartheta}{\omega}\frac{\partial}{\partial r}\left(\sin u + \frac{1}{kr}\cos u\right) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{A_0}{\omega r}\left(-k\cos u + \frac{1}{r}\sin u + \frac{1}{kr^2}\cos u\right)\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin^2\vartheta\right) =\\ &= \frac{2A_0\cos\vartheta}{\omega r^2}\left(k\cos u - \frac{1}{r}\sin u - \frac{1}{kr^2}\cos u\right) + \frac{2A_0\cos\vartheta}{\omega r^2}\left(-k\cos u + \frac{1}{r}\sin u + \frac{1}{kr^2}\cos u\right) = 0\end{aligned}$$

Остава да проверим, че $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ разглеждаме дясната част на това уравнение:

$$\begin{aligned}\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)_\phi &= \frac{A_0}{c^2}\frac{\sin\vartheta}{r}\left(\omega\sin u + \frac{\omega}{kr}\cos u\right) = \frac{A_0}{c^2}\underbrace{\frac{\omega}{k}}_{=c}\frac{\sin\vartheta}{r}\left(k\sin u + \frac{1}{r}\cos u\right) =\\ &= \frac{A_0}{c}\frac{\sin\vartheta}{r}\left(k\sin u + \frac{1}{r}\cos u\right)\end{aligned}$$

Сега разглеждаме и лявата част на уравнението:

$$\begin{aligned}\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)_\phi &= \frac{1}{r}\frac{\partial\left(rB_\vartheta\right)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial B_r}{\partial\vartheta} = \frac{A_0\sin\vartheta}{r\omega}\frac{\partial\left(-k\cos u + \frac{1}{r}\sin u + \frac{1}{kr^2}\cos u\right)}{\partial r} - \frac{2A_0}{\omega r^3}\left(\sin u + \frac{1}{kr}\cos u\right)\frac{\partial\cos\vartheta}{\partial\vartheta} =\\ &= \frac{A_0\sin\vartheta}{\omega r}\left(k^2\sin u - \frac{1}{r^2}\sin u + \frac{k}{r}\cos u - \frac{2}{kr^3}\cos u - \frac{1}{r^2}\sin u + \frac{2}{r^2}\sin u + \frac{2}{kr^3}\cos u\right) =\\ &= \frac{k}{\omega}\frac{A_0\sin\vartheta}{r}\left(k\sin u + \frac{1}{r}\cos u\right) = \frac{A_0}{c}\frac{\sin\vartheta}{r}\left(k\sin u + \frac{1}{r}\cos u\right) = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)_\phi\end{aligned}$$

1.4

Понеже имаме идеален проводник то електричното и магнитното поле в проводника са нула и имаме следните гранични условия на повърхността на проводника:

$$\begin{aligned}E^{\parallel} &= 0,\\ B^{\perp} &= 0.\end{aligned}$$

Полетата $\vec{E}$ и $\vec{B}$ трябва да удовлетворяват уравненията на Максуел във вакуум заедно с горните гранични условия. Ние се интересуваме от плоска и монохроматична вълна разпространяваща се по посока на z и имаща вида:

$$\begin{aligned}\vec{E}\left(x,y,z,t\right) &= \vec{E}_0\left(x,y\right)\exp\left[i\left(kz-\omega t\right)\right]\\ \vec{B}\left(x,y,z,t\right) &= \vec{B}_0\left(x,y\right)\exp\left[i\left(kz-\omega t\right)\right]\end{aligned}$$

Заместваме горните две уравнения в следните уравнения на Максуел:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\times\vec{E} &= -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},\\ \vec{\nabla}\times\vec{B} &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t},\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_{0y}}{\partial x}-\frac{\partial E_{0x}}{\partial y} &= i\omega B_{0z}, \quad \frac{\partial B_{0y}}{\partial x}-\frac{\partial B_{0x}}{\partial y}=-i\frac{\omega}{c^2}E_{0z}\\ \frac{\partial E_{0z}}{\partial y}-ikE_{0y} &= i\omega B_{0x}, \quad \frac{\partial B_{0z}}{\partial y}-ikB_{0y}=-i\frac{\omega}{c^2}E_{0x}\\ ikE_{0x}-\frac{\partial E_{0z}}{\partial y} &= i\omega B_{0y}, \quad ikB_{0x}-\frac{\partial B_{0z}}{\partial y}=-i\frac{\omega}{c^2}E_{0y}\end{aligned}$$

Горните уравнения можем да решим спрямо E_{0x},E_{0y},B_{0x},B_{0y} $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}E_{0x} &= \frac{i}{(\omega/c)^2-k^2}\left(k\frac{\partial E_{0z}}{\partial x}+\omega\frac{\partial B_{0z}}{\partial y}\right),\\ E_{0y} &= \frac{i}{(\omega/c)^2-k^2}\left(k\frac{\partial E_{0z}}{\partial y}-\omega\frac{\partial B_{0z}}{\partial x}\right),\\ B_{0x} &= \frac{i}{(\omega/c)^2-k^2}\left(k\frac{\partial B_{0z}}{\partial x}-\frac{\omega}{c^2}\frac{\partial E_{0z}}{\partial y}\right),\\ B_{0y} &= \frac{i}{(\omega/c)^2-k^2}\left(k\frac{\partial B_{0z}}{\partial y}+\frac{\omega}{c^2}\frac{\partial E_{0z}}{\partial x}\right).\end{aligned}$$

Тоест ако знаем компонентите E_{0z} и B_{0z} то можем да намерим всички компоненти. Заместваме горните уравнения в другите две уравнения на Максуел:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}.\vec{E} &= 0,\\ \vec{\nabla}.\vec{B} &= 0,\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\left(\frac{\omega}{c}\right)^2-k^2\right]E_{0z} &= 0\\ \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\left(\frac{\omega}{c}\right)^2-k^2\right]B_{0z} &= 0\end{aligned}$$

Една възможност е когато $E_{0z}=0$, но $B_{0z}\neq 0$ такива вълни се наричат напречно електрични вълни (TE) друга възможност е когато $\mathrm{B}_{0z}=0$, но $E_{0z}\neq 0$такива вълни се наричат напречно магнитни вълни (TM). Има и напречно електрични и магнитни вълни (TEM) когато $E_{0z}=0$и $B_{0z}=0$.

1.5

От предишната задача имаме, че електричното поле трябва да удовлетворява следните уравнения:

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\left(\frac{\omega}{c}\right)^2-k^2\right]E_{0z} &= 0\\ \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\left(\frac{\omega}{c}\right)^2-k^2\right]B_{0z} &= 0\end{aligned}$$

Заедно с граничните условия върху стените на вълновода:

$$\begin{aligned}E^{\parallel} &= 0,\\ B^{\perp} &= 0.\end{aligned}$$

Понеже търсим TE решение то $E_{0z}=0$ и ще представим B_{0z} чрез разделени променливи:

$$B_{0z}(x,y)=X(x)\,Y(y)$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2\right] X(x) Y(y) &= 0 \Rightarrow \\
Y(y) \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + X(x) \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + \left[\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2\right] X(x) Y(y) &= 0 \Rightarrow \\
\frac{\partial^2 X(x)}{X(x) \partial x^2} + \frac{\partial^2 Y(y)}{Y(y) \partial y^2} &= \left[k^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\right]
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 X(x)}{X(x) \partial x^2} &= -k_x^2 \\
\frac{\partial^2 Y(y)}{Y(y) \partial y^2} &= -k_y^2 \\
-k_x^2 - k_y^2 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2 &= 0
\end{aligned}$$

От тука следват решенията за $X(x)$ и $Y(y)$:

$$\begin{aligned}
X(x) &= A_1 \sin(k_x x) + B_1 \cos(k_x x) \\
Y(y) &= A_2 \sin(k_y y) + B_2 \cos(k_y y)
\end{aligned}$$

От граничните условия имаме:

$$B_{0x}(0, y) = B_{0x}(a, y) = 0$$

понеже:

$$\begin{aligned}
E_{0x} &= \frac{i\omega}{(\omega/c)^2 - k^2} \frac{\partial B_{0z}}{\partial y}, \\
E_{0y} &= \frac{-i\omega}{(\omega/c)^2 - k^2} \frac{\partial B_{0z}}{\partial x}, \\
B_{0x} &= \frac{ik}{(\omega/c)^2 - k^2} \frac{\partial B_{0z}}{\partial x}, \\
B_{0y} &= \frac{ik}{(\omega/c)^2 - k^2} \frac{\partial B_{0z}}{\partial y}.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B_{0z}(0, y)}{\partial x} &= \frac{\partial B_{0z}(a, y)}{\partial x} = 0 \Rightarrow \\
A_1 &= 0, \quad k_x = m\pi/a, \quad (m = 0, 1, 2, ...)
\end{aligned}$$

Аналогично имаме:

$$B_{0y}(x, 0) = B_{0y}(x, b) = 0$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B_{0z}(x, 0)}{\partial y} &= \frac{\partial B_{0z}(x, b)}{\partial y} = 0 \Rightarrow \\
A_2 &= 0, \quad k_y = n\pi/a, \quad (n = 0, 1, 2, ...)
\end{aligned}$$

Окончателно имаме за решението:

$$\begin{aligned}
B_{0z} &= \sum_{n,m=0}^{\infty} B_{n,m} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right), \\
k &= \sqrt{(\omega/c)^2 - \pi^2 \left[(m/a)^2 + (n/b)^2\right]}.
\end{aligned}$$

Ако

$$\omega < c\pi \sqrt{\left[(m/a)^2 + (n/b)^2\right]}$$

Вълновият вектор k става имагинерен и вместо бягаща вълна ще имаме експоненциално бързо затихваща вълна.