Електродинамика

Андон Рангелов, кабинет В 39, email: rangelov@phys.uni-sofia.bg , интернет страница на курса http://ed.quantum-bg.org/

Всеки движещ се заряд създава магнитно поле, което се определя от закона:

$$\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{r}}{r^3},$$

където μ_0 е магнитната проницаемост във вакуум. Магнитното поле което създават токове се дава от законът на Био-Савар:

$$\overrightarrow{B} = \int \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\overrightarrow{l} \times \overrightarrow{r}}{r^3},$$

където I е тока течащ по елемента от проводника с големина $d\overrightarrow{l}$.

Сила на Лоренц е силата действаща върху заредена частица в електромагнитно поле:

$$\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E} + q\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B},$$

където моментната скорост на частицата е $\overrightarrow{v}$, електрическия заряд на частицата е q, $q\overrightarrow{E}$ е силата породена от електрическото поле а $q\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B}$е силата от магнитното поле. Горното уравнение за сила на Лоренц е валидно както за постоянни електрични и магнитни полета така и за променливи.

Често комбинацията от силата на Лоренц и закона на Био-Савар се нарича сила на Ампер. Силата на Ампер е силата на взаимодействие между проводници по които течът токове и се дава като:

$$d\overrightarrow{F} = \overrightarrow{i} \times \overrightarrow{B} dV,$$

където $d\overrightarrow{F}$ е силата с която действа магнитното поле $\overrightarrow{B}$ на елемента от проводника с обем dV по който тече токо с плътност $\overrightarrow{i}$.

Задачи:

1.1

Използвайки закона на Био-Савар намерете магнитното поле на разстояние b от безкраен дълъг и тънък проводник, по който тече ток I.

1.2

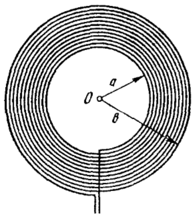
Използвайки закона на Био-Савар намерете магнитното поле по оста на кръгъл проводник с радиус R по който тече ток I. В частност сметнете полето на големи разстояние от центъра на проводника, както и в самият център на кръговият проводник.

1.3

Използвайки резултата от задача 1.1 и формулата за сила на Ампер пресметнете силата на единица дължина с която си взаимодействат два успоредни тънки и безкрайно дълги проводника поставени във вакуум. Токовете по проводниците са I_1 и I_2 а разстоянието между тях е b.

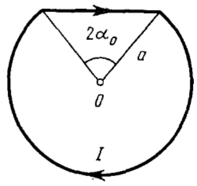
1.4

Тънък проводник поставен в изолация образува плоска спирала както е показано на Фиг. 1. Броя на навивките по който тече тока I е N. Радиуса на най-вътрешната навивка е a а на най-външната е b. Намерете магнитната индукция в центъра на спиралата.



Фигура 1:

1.5



Фигура 2:

Ток I тече по проводник с формата показана на Фигура 2. Намерете магнитното поле създадено от проводника в точката О.

1.6

Частица с маса m и заряд q започва да се движи с начална скорост $\overrightarrow{v} = (0, v, 0)$ в еднородно магнитно поле с големина $\overrightarrow{B} = (0, 0, B)$ опишете количествено движението на заряда. За целта използвайте силата на Лоренц, като приемете че няма електрично поле.

1.7

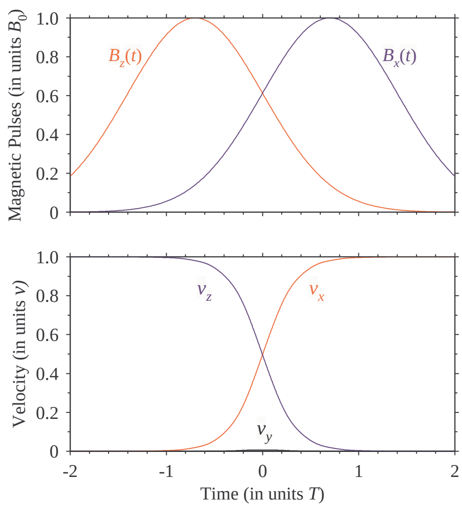
По-екзотична траектория на заредена частица със заряд q и маса m имаме ако към магнитното поле добавим и електрично поле. Нека за определеност имаме магнитно поле B по посока на координатата x и електрично поле по посока на координатата z. Нека частицата да започне да се движи без начална скорост от началото на координатата система и в момента $t = 0$. Намерете траекторията на частицата.

1.8

Заредена частица с маса m и заряд q започва да се движи в магнитно поле с начална скорост $\overrightarrow{v} = [0, 0, v]^T$. Нека нямаме електрично поле и нека магнитното поле да има само компоненти в равнината xz, $\overrightarrow{B}(t) = [B_x(t), 0, B_z(t)]^T$. Понеже Лоренцовата сила действаща на частицата е $q\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B}$ то уравнението на Нютон за движението на частицата е:

$$m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{bmatrix} = q\begin{bmatrix} 0 & -B_z(t) & 0 \\ B_z(t) & 0 & -B_x(t) \\ 0 & B_x(t) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{bmatrix}$$

Покажете, че при ситуация в която компонентата $B_z(t)$ се включва преди $B_x(t)$, след което двете компоненти действат едновременно и накрая $B_z(t)$ се изключва преди $B_x(t)$ (виж Фиг.3) то имаме преместване на посоката на частицата по направление на оста x и това преместване е устойчиво (не зависи от масата и заряда на частицата, както и от нейната начална скорост).



Фигура 3:

Решения:

1.1

Съгласно закона на Био-Савар големината на магнитното поле създадено от малък участък с дължина dl в точка А разположена на разстояние b от проводника и на разстояние r от елемента dl (Фиг. 4) се дава като:

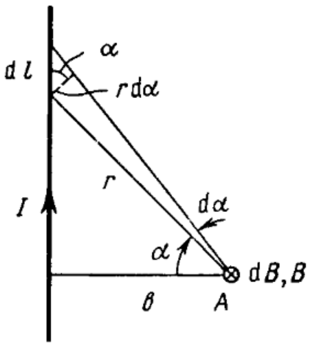
$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\cos\alpha}{r^2},$$

от Фигура 4 се вижда че $dl\cos\alpha = rd\alpha$ и $r = b/\cos\alpha \Rightarrow$

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\cos\alpha}{b}d\alpha.$$

Интегрираме последоното уравнение по цялата дължина на проводника или за ъгъла α от $-\pi/2$ до $\pi/2 \Rightarrow$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi b}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}.$$



Фигура 4:

1.2

Съгласно закона на Био-Савар проекцията на магнитното поле по оста на кръговият контур създавано от малък елемент с дължина dl в точка А разположена на разстояние r от контура (Фиг.5) се дава като:

$$dB_Z = dB\cos\beta = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\cos\beta}{r^2},$$

Интегрираме по цялата дължина на контура $(2\pi R)$ и отчитаме че $\cos\beta = R/r$ както и $r = \left(z^2 + R^2\right)^{1/2}$ получаваме

$$B_Z = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi R}\frac{Rdl}{\left(z^2+R^2\right)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{\left(z^2+R^2\right)^{3/2}},$$

откъдето се вижда че в центъра на кръга магнитното поле е най-голямо

$$B_{Z=0} = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

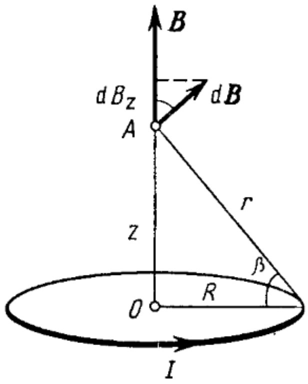
а на големи разстояние когато можем да пренебрегнем R спрямо Z имаме

$$B_{Z>>R} \approx \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{z^3},$$

1.3

Върху всеки елемент от проводника по който тече ток I_2 се създава магнитно поле от страна на проводника с ток I_1. Големината на магнитното поле е

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi b}$$



Фигура 5:

ъгъла между полето B_1 и тока I_2 е прав $\Rightarrow$ на единица дължина от проводника с ток I_2 действа сила $F_{ed} = B_1 I_2$ $\Rightarrow$

$$F_{ed} = \frac{\mu_0}{2\pi b} I_1 I_2$$

1.4

От задача 1.2 имаме за една намотка с радиус r създава поле в центъра на кръга $B_1 = (\mu_0 I) / (2r)$ тогава всички намотки създават поле:

$$B = \int B_1 dN$$

където dN е броя навивки в интервала от r до $r + dr \Rightarrow$

$$dN = \frac{N}{b-a} dr$$

$\Rightarrow$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2} \int_a^b \frac{N}{(b-a)} \frac{1}{r} dr = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{N}{(b-a)} \ln \frac{b}{a}$$

1.5

Принос към магнитното поле ще имат и двата участъка от проводника (правият и частта от окръжността). От закона на Био-Савар имаме, че правият участък създава поле с големина (виж задача 1.1):

$$B_1 = 2 \frac{\mu_0 I}{4\pi a \cos\alpha_0} \int_0^{\alpha_0} \cos\alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I \sin\alpha_0}{2\pi a \cos\alpha_0}$$

а от дъгата имаме принос

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{(2\pi - 2\alpha_0) a}{a^2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} (\pi - \alpha_0)$$

окончателно имаме:

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} (\pi - \alpha_0 + \tan\alpha_0)$$

1.6

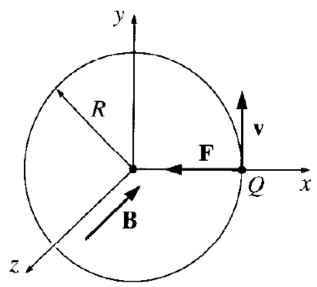
Понеже имаме само магнитна сила то тя е винаги перпендикулярна на скоростта на частицата и следователно не върши работа. Магнитната сила само променя посоката на скоростта на заредената частица и я кара да се движи по окръжност с радиус R (Фиг.6), който се определя от условието за равновесие на центробежната сила и магнитната сила:

$$m\frac{v^2}{R} = qvB$$

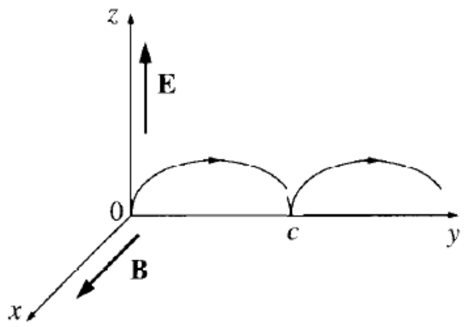
$\Rightarrow$

$$R = \frac{mv}{qB}$$

това е така нареченият циклотронен радиус.



Фигура 6:



Фигура 7:

1.7

Отначало частицата е в покой, така че имаме само електрична част на Лоренцовата сила под която частицата започва да се ускорява. Когато набере скорост започва да и действа и магнитната компонента на Лоренцовата сила. Поради посоките на магнитното и електричното поле ще имаме движение в равнината yz и скоростта ше се дава като:

$$\overrightarrow{v} = (0, \dot{y}, \dot{z})$$

$\Rightarrow$

$$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B} = \begin{vmatrix} \mathsf{e}_x & \mathsf{e}_y & \mathsf{e}_z \\ 0 & \dot{y} & \dot{z} \\ B & 0 & 0 \end{vmatrix} = B\dot{z}\mathsf{e}_y - B\dot{y}\mathsf{e}_z$$

като напишем вторият закон на Нютон за Лоренцовата сила то имаме:

$$q\overrightarrow{E} + q\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B} = m\overrightarrow{a}$$

или по компоненти имаме:

$$\begin{aligned} qB\dot{z} &= m\ddot{y} \\ qE - qB\dot{y} &= m\ddot{z} \end{aligned}$$

въвеждайки променливите $\omega = qB/m$ и $E/B = a \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \frac{\ddot{y}}{\omega} \\ \ddot{z} &= \omega a - \omega \dot{y} \end{aligned}$$

Тази система решаваме като диференцираме по времето първото уравнение и го заместим във второто $\Rightarrow$

$$\dddot{y} + \omega^2 \dot{y} = \omega^2 a$$

това уравнение е не хомогенно и следователно решението му е решение на хомогенното уравнение плюс едно частно решение на не хомогенното уравнение

$$y(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) + at + C_3$$

а уравнение за z получаваме като интегрираме уравнението $\dot{z} = \ddot{y}/\omega$ и заместим $\dot{y}$ от функцията за $y \Rightarrow$

$$z(t) = C_2 \cos(\omega t) - C_1 \sin(\omega t) + C_4$$

Налагаме началните условия:

$$\begin{aligned} \dot{y}(0) &= \dot{z}(0) = 0 \\ y(0) &= z(0) = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{a}{\omega}(\omega t - \sin(\omega t)) \\ z(t) &= \frac{a}{\omega}(1 - \cos(\omega t)) \end{aligned}$$

за да определим C_1, C_2, C_3 и C_4. Полагаме $a/\omega = R$ и заместваме в уравнението $\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t) = 1 \Rightarrow$

$$(y - R\omega t)^2 + (z - R)^2 = R^2$$

Което уравнение е на движеща във времето окръжност или така наречената циклоида (Фиг.7)

1.8

Тръгваме от уравнението на Нютон:

$$m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{bmatrix} = q\begin{bmatrix} 0 & -B_z(t) & 0 \\ B_z(t) & 0 & -B_x(t) \\ 0 & B_x(t) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{bmatrix}$$

и минаваме в друга координатна система, в такава че матрицата :

$$= q\begin{bmatrix} 0 & -B_z(t) & 0 \\ B_z(t) & 0 & -B_x(t) \\ 0 & B_x(t) & 0 \end{bmatrix},$$

да е диагонална (в базис образуван от собствените вектори на матрицата). Връзката между скоростите в стария базис и новият базис е следната:

$$\begin{bmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -\cos(\varphi(t)) & \sqrt{2}\sin(\varphi(t)) & \cos(\varphi(t)) \\ i & 0 & i \\ \sin(\varphi(t)) & \sqrt{2}\cos(\varphi(t)) & -\sin(\varphi(t)) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_x(t) \\ u_y(t) \\ u_z(t) \end{bmatrix},$$

където $\tan(\varphi(t)) = B_x(t)/B_z(t)$. Тогава уравнението на Нютон за движението на частицата в новият базис е

$$m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} u_x(t) \\ u_y(t) \\ u_z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} iq\sqrt{B_x^2(t) + B_z^2(t)} & \frac{m}{\sqrt{2}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} & 0 \\ -\frac{m}{\sqrt{2}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} & 0 & \frac{m}{\sqrt{2}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \\ 0 & -\frac{m}{\sqrt{2}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} & -iq\sqrt{B_x^2(t) + B_z^2(t)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_x(t) \\ u_y(t) \\ u_z(t) \end{bmatrix}.$$

Нека сега разгледаме така нареченото адиабатно приближение $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \approx 0$ (валидно когато промяната на магнитните полета става бавно) $\Rightarrow$

$$m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} u_x(t) \\ u_y(t) \\ u_z(t) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} iq\sqrt{B_x^2(t) + B_z^2(t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -iq\sqrt{B_x^2(t) + B_z^2(t)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_x(t) \\ u_y(t) \\ u_z(t) \end{bmatrix}.$$

тогава лесно намираме връзката между началните условия (при $t = 0$) и скоростите на частицата в произволен момент от време t

$$\begin{bmatrix} u_x(t) \\ u_y(t) \\ u_z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp\left(\underbrace{i\int_0^t \frac{q}{m}\sqrt{B_x^2(t)+B_z^2(t)}dt}_{=\eta}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \exp\left(\underbrace{-i\int_0^t \frac{q}{m}\sqrt{B_x^2(t)+B_z^2(t)}dt}_{=\eta}\right) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} u_x(0) \\ u_y(0) \\ u_z(0) \end{bmatrix}, \tag{1}$$

Тогава в първоначалния базис имаме:

$$\begin{bmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -\cos(\varphi(t)) & \sqrt{2}\sin(\varphi(t)) & \cos(\varphi(t)) \\ i & 0 & i \\ \sin(\varphi(t)) & \sqrt{2}\cos(\varphi(t)) & -\sin(\varphi(t)) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \exp(i\eta) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \exp(-i\eta) \end{bmatrix} . \tag{2}$$

$$. \begin{bmatrix} -\cos(\varphi(0)) & -i & \sin(\varphi(0)) \\ \sqrt{2}\sin(\varphi(0)) & 0 & \sqrt{2}\cos(\varphi(0)) \\ \cos(\varphi(0)) & -i & -\sin(\varphi(0)) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} v_x(0) \\ v_y(0) \\ v_z(0) \end{bmatrix}, \tag{3}$$

или ако вземем началните условия $v_z(0) = v, v_x(0) = v_y(0) = 0 \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos(\eta)\cos(\varphi(t))\sin(\varphi(0)) + \sin(\varphi(t))\cos(\varphi(0)) \\ -\sin(\eta)\sin(\varphi(0)) \\ \cos(\eta)\sin(\varphi(t))\sin(\varphi(0)) + \cos(\varphi(t))\cos(\varphi(0)) \end{bmatrix}, \tag{4}$$

очевидно при $\varphi(0) = 0$ няма да имаме проекция на скоростта по посока $y \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\varphi(t)) \\ 0 \\ \cos(\varphi(t)) \end{bmatrix}, \tag{5}$$

и ако магнитните полета са така, че $B_z(t)$ да изпреварва $B_x(t)$ то независимо от η (от $\frac{q}{m}$) и скоростта на частицата, ще имаме промяна на посоката на движение от z към x.

Забележка: Задачата е предназначена за самостоятелна подготовка и представя аналогия на известен в квантовата механика проблем за система с 3 нива и така нареченият Стимулиран Раманов адиабатен преход (STIRAP). Информация за STIRAP можете да получите от

`http://www.physics.sk/aps/pubs/2008/aps-08-03/aps-08-03.pdf`

За тези който се интересуват как се смята тази задача за заряда то можете по-подробно да се запознаете с нея на следният линк:

`http://ed.quantum-bg.org/Rangelov09.pdf`