Електродинамика

Андон Рангелов, кабинет В 39, email: rangelov@phys.uni-sofia.bg , интернет страница на курса `http://ed.quantum-bg.org/`

Този час ще разгледаме заряд (заряди) до метални повърхности. Ще търсим потенциала в такива задачи с помощта на метода на образите. За целта нека да докажем единствеността на решението на уравнение на Лаплас при наложени гранични условия. Предполагаме, че имаме два потенциала Φ_1 и Φ_2, които са решение на уравнение на Лаплас и удовлетворяват граничните условия на Дирихле и Нойман за заземени метални повърхности: $\Phi_{1,2} = 0$ и $\partial\Phi_{1,2}/\partial n = 0$. Тогава нека вземем тяхната разлика $U = \Phi_1 - \Phi_2$. От линейността на уравнение на Лаплас следва, че U също удовлетворява уравнение на Лаплас:

$$\Delta U = 0.$$

Заедно с граничните условия:

$$U = 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial n} = 0.$$

Ако сега използваме формулата на Грин:

$$\int (\varphi\Delta\psi + \nabla\psi.\nabla\varphi)\, dV = \oiint \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} d\left|\overrightarrow{S}\right|$$

и изберем скаларите $\psi = \varphi = U$ то имаме:

$$\int (U\Delta U + \nabla U.\nabla U)\, dV = \oiint U\frac{\partial U}{\partial n} d\left|\overrightarrow{S}\right|$$

Отчитайки граничните условия за $U \Rightarrow$

$$\int |\nabla U|^2\, dV = 0$$

$\Rightarrow \nabla U = 0 \Rightarrow U$ е константа в обема V заради граничното условие, но $U = 0$ върху повърхността заграждаща обема V $\Rightarrow U = 0 \Leftrightarrow \Phi_1 = \Phi_2$ с което теоремата за единственост е доказана.

Задачи:

1.1 Ако точков заряд q е разположен във вакуум на разстояние d от повърхността на заземена безкрайна метална плоча (Фиг.1) то намерете:

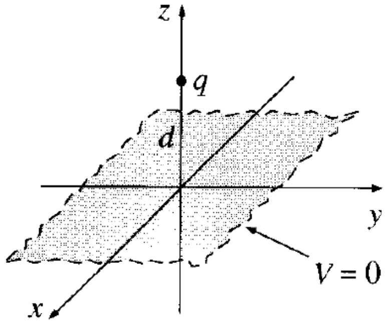
а) Потенциала φ над плочата;

б) Плътността на повърхнините заряди който се индуцират върху плочата;

в) Общият заряд индуциран върху плочата;

г) Силата с която си взаимодействат заряда и плочата;

д) Енергията на системата заряд метална плоча.

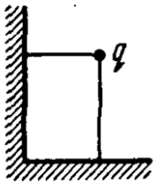


Фигура 1:

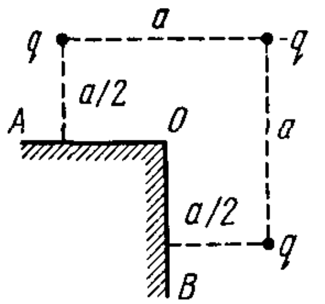
1.2 Използвайки метода на образите (предишната задача) и факта, че в електростатиката е валиден принципа на суперпозицията то намерете образите на зарядите в следните системи:

а) Две успоредни безкрайни и заземени метални плочи и между тях точков заряд с големина q;

b) Точков заряд q се намира между две проводящи, заземени и взаимно перпендикулярни метални плочи (Фиг.2)



Фигура 2:



Фигура 3:

1.3 Ако имаме три точкови заряда разположени до повърхността на две взаимно перпендикулярни заземени метални плочи(Фиг.3), то намерете силата действаща на заряда $-q$.

1.4

Точков заряд с големина q се намира на разстояние R от центъра на заземена метална сфера с радиус a, както е показано на Фиг.4 намерете:

а) Потенциала φ изън сферата;

б) Плътността на повърхнините заряди който се индуцират върху сферата;

в) Общият заряд индуциран върху сферата;

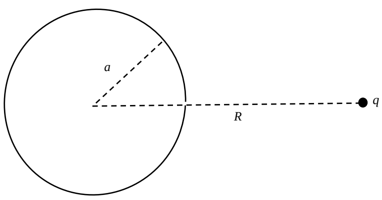
г) Силата с която си взаимодействат заряда и сферата.

1.5

Решете предишната задача, ако сферата не е заземена а има потенциал V_0.

1.6

Намерете силата която изпитва точков заряд с големина q ако е поставен на разстояние R от центъра на сферична кухина с радиус a ако кухината е издълбана в метал.



Фигура 4:

Решения:

1.1

За потенциала имаме $\varphi(x,y,z=0)=0$ (върху повърхността на плочата) и $\varphi(x,y,z)=0$ на безкрайно далечно разстояние от заряда. Ако по някакъв остроумен начин намерим конфигурация която удовлетворява тези гранични условия и едновременно с това удовлетворява и уравнение на Лаплас то от теоремата за единственост на решението, ще имаме че сме намерили потенциала φ.

Нека да разгледаме заряда $-q$ разположен от другата страна на металната плоскост симетрично относно заряда q (на разстояние $-d$ от плочата). Тогава потенциала който се създава в пространството над плочата е:

$$\varphi(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}}-\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z+d)^2}}\right)$$

очевидно този потенциал удовлетворява граничните условия:

$$\begin{aligned}\varphi(x,y,0) &= 0,\\ \varphi_{x^2+y^2+z^2>>d} &\to 0.\end{aligned}$$

Нека сега да проверим, че удовлетворява и уравнение на Лаплас:

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+d)^2}}\right)=$$
$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3x^2}{\left(x^2+y^2+(z-d)^2\right)^{5/2}}-\frac{1}{\left(x^2+y^2+(z-d)^2\right)^{3/2}}-\frac{3x^2}{\left(x^2+y^2+(z+d)^2\right)^{5/2}}+\frac{1}{\left(x^2+y^2+(z+d)^2\right)^{3/2}}\right)$$

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+d)^2}}\right)=$$
$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3y^2}{\left(x^2+y^2+(z-d)^2\right)^{5/2}}-\frac{1}{\left(x^2+y^2+(z-d)^2\right)^{3/2}}-\frac{3y^2}{\left(x^2+y^2+(z+d)^2\right)^{5/2}}+\frac{1}{\left(x^2+y^2+(z+d)^2\right)^{3/2}}\right)$$

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+d)^2}}\right)=$$
$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3(z-d)^2}{\left(x^2+y^2+(z-d)^2\right)^{5/2}}-\frac{1}{\left(x^2+y^2+(z-d)^2\right)^{3/2}}-\frac{3(z+d)^2}{\left(x^2+y^2+(z+d)^2\right)^{5/2}}+\frac{1}{\left(x^2+y^2+(z+d)^2\right)^{3/2}}\right)$$

и следователно $\Delta\varphi(x,y,z)=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0$. По теоремата за за единственост на решението сме намерили потенциала $\varphi(x,y,z)$.

а) след като знаем потенциала $\varphi(x,y,z)$ то лесно можем да намерим индуцираният повърхнинен заряд върху металната плоча от граничното условие:

$$\left(\frac{\partial\varphi(x,y,z>0)}{\partial z}-\underbrace{\frac{\partial\varphi(x,y,z<0)}{\partial z}}_{=0}\right)_{z=0}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{(z-d)}{\left(x^2+y^2+(z-d)^2\right)^{3/2}} - \frac{(z+d)}{\left(x^2+y^2+(z+d)^2\right)^{3/2}}\right)_{z=0} = -\frac{qd}{2\pi\varepsilon_0\left(x^2+y^2+d^2\right)^{3/2}}$$

$\Rightarrow$

$$\sigma = -\frac{qd}{2\pi\left(x^2+y^2+d^2\right)^{3/2}}$$

б) общият заряд ще намерим като преминем в полярни координати и интегрираме по площта на плочата. Радиус вектора в полярни координати е $r^2 = x^2 + y^2$ и тогава имаме:

$$Q = \int_0^\infty \sigma 2\pi r dr = -qd\int_0^\infty \frac{r}{\left(r^2+d^2\right)^{3/2}}dr = -q$$

г) силата с която си взаимодействат двата заряда е:

$$F = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\left(2d\right)^2}$$

д) Трябва да се внимава при пресмятането на енергията на системата, понеже енергията не е равна на енергията между два точкови заряда с големини q и $-q$, който са на разстояние $2d$ един от друг а е два пъти по-малка. В това можем да се убедим като сметнем работата (A) необходима за преместване на заряда q от разстояние d до безкрайност:

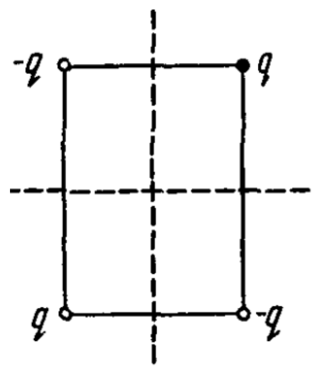
$$A = -\int_d^\infty F dz = \int_d^\infty \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\left(2z\right)^2}dz = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 4d}$$

Това е така понеже ние местим само заряда q, но не и неговият образ (преместването на образа не е свързано с извършване на работа понеже метала е еквипотенциална система)

1.2

а) Получават се безброй много образи, аналогично на случаят в оптиката когато имаме безброй много образи на предмет поставен между две успоредни огледала.

б) За образа виж Фиг.5.



Фигура 5:

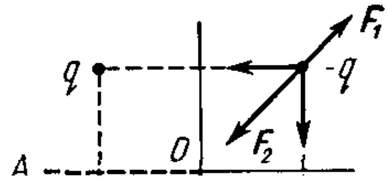
1.3

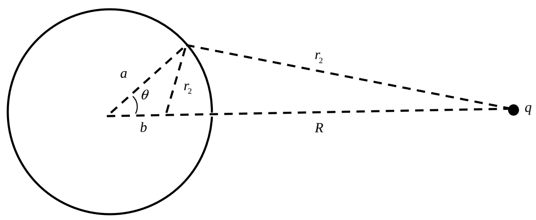
За образа виж Фиг.6.

$$F = \frac{2\sqrt{2}-1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{2a^2}$$

1.4 Търсим образ със заряд Q разположен на разстояние b от центъра на сферата, като допущаме че Q лежи върху правата която свързва центъра на сферата и заряда q (Фиг.7). Тогава потенциала извън сферата се дава като:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{r_1} + \frac{q}{r_2}\right),$$





Фигура 7:

където разстоянията r_1 и r_2 можем да изразим от косинусова теорема за двата триъгълника $\Rightarrow$

$$\varphi\left(r,\theta\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{\sqrt{b^2+r^2-2br\cos\theta}}+\frac{q}{\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\theta}}\right).$$

Потенциала трябва да е нула когато $r=a$ за произволен ъгъл θ (това ни е граничното условие) $\Rightarrow$

$$\varphi\left(a,\theta\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{\sqrt{b^2+a^2-2ba\cos\theta}}+\frac{q}{\sqrt{R^2+a^2-2Ra\cos\theta}}\right)=0. \tag{1}$$

Полагайки $\theta=0$ и $\theta=\pi$ получаваме следната система:

$$\begin{aligned}\frac{Q}{\sqrt{\left(a-b\right)^2}} &= -\frac{q}{\sqrt{\left(R-a\right)^2}},\\ \frac{Q}{\sqrt{\left(a+b\right)^2}} &= -\frac{q}{\sqrt{\left(R+a\right)^2}}.\end{aligned}$$

Последната система е еквивалентна на:

$$\begin{aligned}Q\left(R-a\right)+qa &= qb,\\ Q\left(R+a\right)+qa &= -qb.\end{aligned}$$

Събираме двете равенства $\Rightarrow$

$$2QR+2qa=0$$

Окончателно имаме:

$$\begin{aligned}Q &= -\frac{a}{R}q,\\ b &= \frac{a^2}{R}.\end{aligned}$$

Тези две условия заместени в уравнение 1 очевидно го удовлетворяват за произволен ъгъл θ.

б) Плътността на заряда индуцирана върху сферата, ще намерим като приложим граничното условие за скок на нормалната компонента на интензитета на електричното поле върху повърхността на сферата:

$$\left(\frac{\partial \varphi \left(r > a, \theta \right)}{\partial r} - \underbrace{\frac{\partial \varphi \left(r < a, \theta \right)}{\partial r}}_{=0} \right)_{r=a} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + \left(Rr/a\right)^2 - 2Rr\cos\theta}} \right)_{r=a} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$\Rightarrow$

$$\sigma\left(\theta\right) = \frac{q}{4\pi a}\left(a^2 - R^2\right)\left(a^2 + R^2 - 2Ra\cos\theta\right)^{-3/2}$$

в) Решаваме тази част от задачата като интегрираме в сферични координати

$$\begin{aligned} Q_{inuc} &= \int \sigma ds = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sigma a^2 \sin\theta d\theta d\phi = 2\pi a^2 \int_0^{\pi} \sigma \sin\theta d\theta = \\ &= \frac{qa}{2}\left(a^2 - R^2\right) \int_0^{\pi} \left(a^2 + R^2 - 2Ra\cos\theta\right)^{-3/2} \sin\theta d\theta = ... = -\frac{a}{R} q \end{aligned}$$

г) Силата с която си взаимодействат заряда и металната сфера е:

$$F = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 \left(R - b\right)^2} = -\frac{q^2 Ra}{4\pi\varepsilon_0 \left(R^2 - a^2\right)^2}$$

1.5

Решаваме аналогично на предишната задача, но имаме и втори образ в центъра на сферата с големина която да създава потенциала V_0 върху повърхността на сферата:

$$V_0 = \frac{q_{new}}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$$

$\Rightarrow$

$$q_{new} = 4\pi\varepsilon_0 a^2 V_0$$

1.6

Решава се като следваме стъпки аналогични на задача 1.5 или се съобразява веднага от симетрията, че реалният заряд и образа имат разменени места.