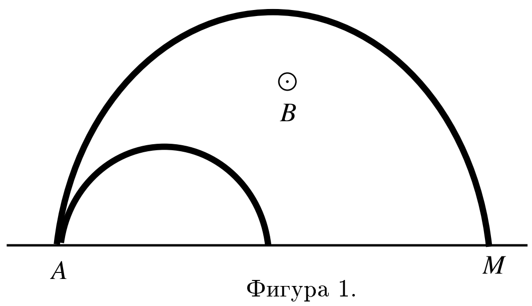
Задачи:

1.

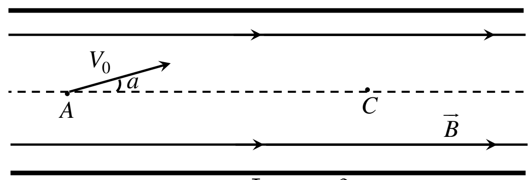
През тесният процеп на масспектрометър (точка А от фиг. 1) се инжектират под прав ъгъл спрямо равнината АМ смес от еднократно йонизирани йони на K^{39} и K^{41}. Кинетичната енергия на йоните е E а масите им са съответно m_1 и m_2 за K^{39} и K^{41}. Ако магнитното поле B е хомогенно и разположено перпендикулярно на равнината на чертежа то намерете разстоянието между положението на йоните K^{39} с прямо йоните на K^{41} при напускане на магнитното поле (при повторното пресичане на равнината АМ).



Фигура 1.

2.

Електрон със скорост V_0 попада в точка А от оста на дълъг соленоид (фиг. 2). Скоростта на електрона сключва ъгъл α с оста на соленоида. Ако магнитното поле на соленоида е B_0 намерете на какво разстояние l от точка А се намира точка С, в която електроните отново пресичат оста на соленоида. При какви други стойности на магнитното поле B електрона отново ще мине през точка С?



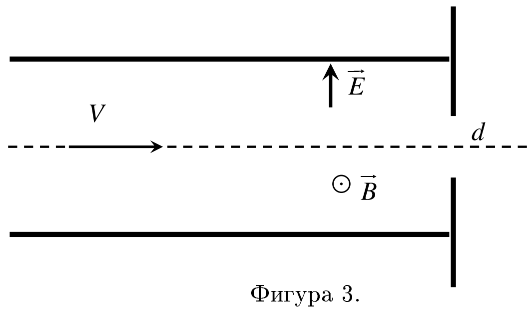
Фигура 2.

3.

На фиг. 3 е показана схемата на филтър за скоростите на заредени частици. На изхода на плосък кондензатор с дължина L е поставена симетрично диафрагма с ширина d. Кондензатора се намира в хомогенно магнитно поле B, което е перпендикулярно на електричното поле E на кондензатора. По оста на кондензатора влита тесен успореден сноп електрони, които имат различни скорости. Полетата E и B са насочени така, че да отклоняват снопа в противоположни посоки.

1) При каква скорост V_0 на електроните в снопа те ще преминат през кондензатора без да се отклонят?

2) В какъв интервал $V_0 \pm \Delta V$ се намират скоростите на електроните преминали през диафрагмата?



Фигура 3.

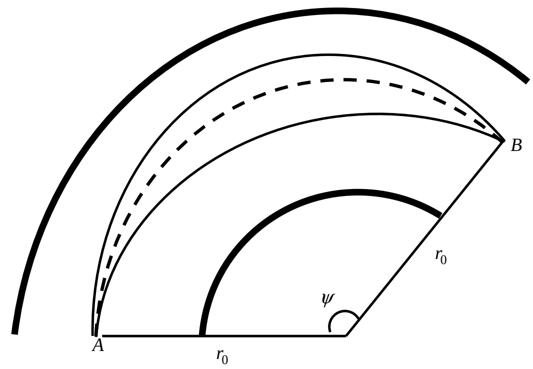
4.

В точка А, Разположена на разстояние r_0 от оста на цилиндричен кондензатор, се инжектира слабо разходящ сноб от електрони (фиг. 4). Електричното поле на цилиндричният кондензатор се изменя по закона $E \sim 1/r$ и силовите му линии са разположени в радиално направление. Големината на електричното поле се подбира така, че електроните със скорост V_0 насочена точно перпендикулярно на радиуса r_0 да се движат по окръжност (равновесна орбита с радиус r_0).

1)Намерете какво трябва да е електричното поле E_0 на равновесната орбита (електроните се движат по окръжност с радиус r_0);

2)Разгледайте движението на електроните, чиято начална скорост сключва малък ъгъл с допирателната към равновесната орбита и покажете, че това движение е хармонично трептене;

3)Намерете най-малкият ъгъл ψ, при завъртането на който снопа се фокусира, тоест всички електрони се намират отново на разстояние r_0 от оста на кондензатора (в точка В от фигура 4).



Фигура 4.

5.

В пространството между два коаксиални цилиндрични проводника се подържа вакуум. Радиуса на вътрешният цилиндричен проводник е a а на външният е b, както е показано на фигура 5. Освен това в пространството между плочите на цилиндричният кондензатор имаме и постоянно хомогенно магнитно поле B, което е ориентирано успоредно на оста на цилиндъра и може да зависи само от разстоянието r до оста на цилиндъра. Такъв прибор с цилиндричен кондензатор и магнитно поле се нарича магнетрон.

1) Разгледайте случаят когато магнитното поле е изключено ($B = 0$), но се подава потенциална разлика U между двата електрода. Намерете за този случай скоростта на електроните, които достигат до външният електрод и са излъчени от вътрешният електрод с пренебрежимо малка скорост.

2) За предишната подточка намерете как зависи скоростта на електроните излъчени с пренебрежима скорост от вътрешният електрод като функция на разстоянието до оста на симетрия (r), като може да ползвате на готово, че потенциала между два цилиндрични кондензатора е $\sim \ln r$.

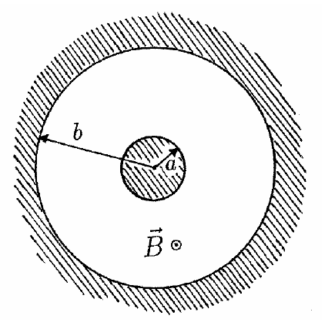
3) Нека сега разгледаме случаят когато двата електрода се подържат при един и същи потенциал ($U = 0$), но имаме магнитно поле ($B \neq 0$). Нека допуснем, че електрон със скорост V_0 насочена в радиално направление се излъчи от вътрешният цилиндричен електрод. Намерете граничното магнитно поле B_g при което електрона все още ще достига външният електрод (при полета по-големи от B_g електроните вече не достигат външният цилиндър)

4) Магнетрона може да послужи за експериментално измерване отношението на заряда на електрона към неговата маса (e/m). Това може да стане като включим магнитното поле B и меним напрежението U което подаваме между двата цилиндрични електрода. При критична стойност на напрежението електроните излъчени от вътрешният електрод ще престанат да достигат външният електрод и токът, който протича между плочите на цилиндричният кондензатор ще стане равен на нула. Намерете отношението e/m ако тока спира да тече при магнитно поле B и потенциал U. При решаването на тази подточка считайте, че електроните напущат вътрешният електрод с пренебрежимо малка скорост.

6.

Процепа на електростатична леща (Фиг.6) има отвор, дължината L на който е значително по-голям от неговата ширина y_0. Отляво на лещата електричното поле е равно на E_1, а от дясно е E_2. Сноп заредени частици със заряд e е фокусиран на разстояние x_1 вляво от лещата, вдясно от нея той отново се фокусира на разстояние x_2. До процепа частиците се ускоряват от разлика на потенциалите V_0. Покажете, че формулата за лещата има вида:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \approx \frac{E_2 - E_1}{2V_0},$$

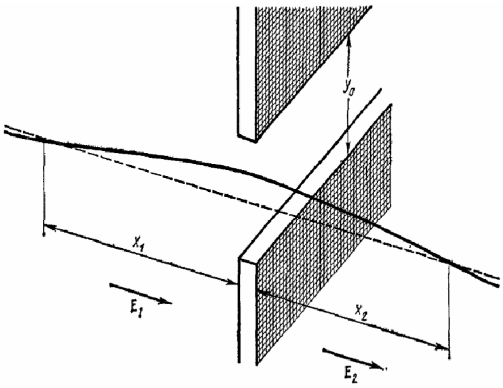


Фигура 5.

ако:

$$V_0 \gg E_1 x_1,$$
$$V_0 \gg E_2 x_2,$$
$$x_1, x_2 \gg y_0$$

Упътване: изберете подходяща повърхност и пресметнете по теоремата на Гаус потока на електричното поле през нея, за да намерите електричното поле по оста y. Използвайте факта, че интензитета на електричното поле по оста x може приближено да считате за линейна функция на координатата x.



Фигура 6.

Решения:

1.

Силата която действа на сместа от йони е Лоренцовата сила и тя се уравновесява с центробежната сила, която действа на йоните по тяхното движение по окръжност. Условието за движение по окръжност за йоните на двата изотопа записваме така:

$$m_1 \frac{V_1^2}{R_1} = eBV_1,$$
$$m_2 \frac{V_2^2}{R_2} = eBV_2$$

$\Rightarrow$

$$R_1 = \frac{m_1 V_1}{eB} = \frac{\sqrt{2Em_1}}{eB},$$
$$R_2 = \frac{m_2 V_2}{eB} = \frac{\sqrt{2Em_2}}{eB}.$$

Тоест за разстоянието между йоните на двата изотопа при напущане на магнитното поле имаме:

$$2R_1 - 2R_2 = \frac{\sqrt{8E}}{eB}\left(\sqrt{m_1} - \sqrt{m_2}\right)$$

2.

Разлагаме скоростта на електрона на две съставящи: $V_\perp$ -перпендикулярно на оста на соленоида и $V_\parallel$ -успоредна на оста на соленоида:

$$V_\perp = V_0 \sin\alpha,$$
$$V_\parallel = V_0 \cos\alpha.$$

На електрона действа Лоренцова сила $F = eV_\perp B_0$ и той извършва движение по винтова линия. Тоест към постъпателното движение на електрона със скорост $V_\parallel$ по оста на соленоида се добавя и равномерно въртене по окръжност с линейна скорост $V_\perp$ в равнина перпендикулярна на оста на соленоида. От закона за движение по окръжност имаме:

$$m\frac{V_\perp^2}{R} = eV_\perp B_0$$

$\Rightarrow$

$$\frac{V_\perp}{R} = \omega = eB_0/m$$

Тоест въртенето става по окръжност с радиус R и честота ω. В началният момент електрона се намира на оста на соленоида и отново се връща на нея след всяко пълно завъртане (след време кратно на периода на завъртането $T_k = \frac{2\pi}{\omega}k$, $k = 0, 1, 2, 3...$). За време $T_{k=1}$ електрона се е предвижил на разстояние $l = T_{k=1}V_\parallel = \left(2\pi V_0 \cos\alpha\right)/\omega \Rightarrow$

$$l = \frac{2\pi m V_0 \cos\alpha}{eB_0}$$

Електрона също ще мине през точка C, ако магнитното поле е:

$$B = kB_0, \quad k = 0, 1, 2, 3...$$

3.

1) При влизането на електрона в кондензатора му действа Лоренцова сила:

$$F_y = eVB - eE.$$

Електрона ще мине през кондензатора, без да се отклони когато тази сила е нула, тоест за скорост V_0 на електрона трябва да изпълнява следното условие:

$$V_0 = \frac{E}{B}.$$

2) Нека сега разгледаме движението на електрон, чиято скорост V Малко се различава от V_0 ($V = V_0 + \delta V$, за $\delta V/V_0 \ll 1$). Можем в първо приближение да пренебрегнем x-тата компонента на Лоренцовата сила, тогава за y-тата компонента имаме:

$$F_y = eVB - eE = eB\left(V_0 + \delta V\right) - eE = eB\delta V \Rightarrow a_y = \frac{eB\delta V}{m}$$

Електрона преминава през кондензатора за време $T \approx L/V_0$, като за това време вертикалното му отклонение е

$$y = \frac{a_y T^2}{2} \approx \frac{eB\delta V}{2m}\frac{L^2}{V_0^2}$$

На изхода на диафрагмата имаме равенството $y = d/2 \Rightarrow$

$$\delta V \approx \frac{dmV_0^2}{L^2 eB}$$

4.

1) Електричното поле E_0 на равновесната орбита определяме от условието за движение по окръжност:

$$eE_0 = ma_0 = m\frac{V_0^2}{r_0} \Rightarrow E_0 = \frac{m}{e}\frac{V_0^2}{r_0}.$$

Понеже електричното поле в кондензатора е обратно пропорционално на разстоянието ($E \sim 1/r$) то $\Rightarrow$ $E\left(r\right) = \left(E_0 r_0\right)/r = \left(mV_0^2\right)/\left(err_0\right)$.

2) Нека да разгледаме задачата в отправна система която се върти около оста z на кондензатора със скорост равна на $V_\perp$, перпендикулярната спрямо радиуса съставяща на скоростта на електроните. Понеже отправната система не е инерциална (имаме въртене и освен това $V_\perp$ се променя в зависимост от разстоянието) то в тази отправна система възниква не инерциална сила, която се дава като $F = \left(mV_\perp^2\right)/r \Rightarrow$

$$ma = m\frac{d^2 r}{dt^2} = m\frac{V_\perp^2}{r} - eE$$

Електричните сили са насочени в радиално направление и следователно техният въртящ момент спрямо оста z е нула, поради което проекцията на момента на импулса на електроните върху оста z не се променя:

$$mrV_\perp = mr_0 V_0 \Rightarrow V_\perp = V_0\frac{r_0}{r}$$

Заместваме полето $E\left(r\right)$ и скоростта $V_\perp$ в уравнението за движение и следователно имаме:

$$m\frac{d^2 r}{dt^2} = m\frac{V_\perp^2}{r} - eE \Leftrightarrow \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{r_0^2 V_0^2}{r^3} - \frac{V_0^2}{r}$$

сега нека представим разстоянието r като радиуса на кръговата орбита r_0 плюс малко отклонение δ от нея:

$$r = r_0 + \delta, \quad \delta/r_0 \ll 1$$

$\Rightarrow$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d^2\delta}{dt^2},$$
$$r^{-1} = (r_0+\delta)^{-1} = r_0^{-1}(1+\delta/r_0)^{-1} \approx r_0^{-1}(1-\delta/r_0)$$
$$r^{-3} = (r_0+\delta)^{-3} = r_0^{-3}(1+\delta/r_0)^{-3} \approx r_0^{-3}(1-3\delta/r_0)$$

тогава за уравнението на движение получаваме:

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} = \frac{V_0^2}{r_0}(1-3\delta/r_0) - \frac{V_0^2}{r_0}(1-\delta/r_0) = -2\frac{V_0^2}{r_0^2}\delta$$

тъй като $\frac{V_0^2}{r_0^2} > 0$, то последното уравнение описва хармонични трептения на електрона около равновесната орбита с кръгова честота $\omega^2 = 2\frac{V_0^2}{r_0^2}$ задавани като:

$$\delta(t) = \delta_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Началната фаза φ_0 лесно се вижда, че е нула понеже в началният момент електроните се инжектират в точка А от равновесната орбита.

3) Снопа се фокусира отново когато имаме $\delta(t) = 0$, тоест след време $T = \pi/\omega$ за това време в лабораторната отправна система електроните са се завъртели на ъгъл $\psi = (TV_0)/r_0 = \pi/\sqrt{2} \approx 127,3^\circ$

5.

1) Разликата в потенциалната енергия на електрона между вътрешният и външният цилиндър се превръща в кинетична енергия на електрона:

$$\frac{1}{2}mV^2 = eU \Rightarrow V = \sqrt{\frac{2eU}{m}}.$$

2) потенциала φ в точка на разстояние r от оста на цилиндрите се дава като:

$$\varphi(r) = c_1 \ln r + c_2,$$

където константите c_1 и c_2 определяме от потенциала върху вътрешният и външният цилиндър. При предположени, че вътрешният цилиндър е с потенциал 0 а външният цилиндър е при потенциал $U \Rightarrow c_1 = U/\left(\ln\frac{b}{a}\right)$, $c_2 = -(U\ln a)/\left(\ln\frac{b}{a}\right) \Rightarrow$

$$\varphi(r) = \frac{U\ln\frac{r}{a},}{\ln\frac{b}{a}}$$

или за потенциалната енергия на електрона имаме $e\varphi(r)$ която преминава в кинетична енергия:

$$\frac{1}{2}mV^2(r) = \frac{eU\ln\frac{r}{a},}{\ln\frac{b}{a}} \Rightarrow V(r) = \sqrt{\frac{2eU\ln\frac{r}{a},}{m\ln\frac{b}{a}}}$$

3) Когато имаме само магнитно поле то на електрона действа само магнитната част на силата на Лоренц и електрона започва да се върти по окръжност с радиус R, който лесно намираме от условието за движение по окръжност:

$$eBV_0 = m\frac{V_0^2}{R}$$

Когато електроните попадат тангенциално върху външният цилиндър е критичният случай и при увеличаване на магнитното поле на магнитрона електроните няма да достигат до външният цилиндър. Радиуса при който електроните попадат тангенциално върху външният цилиндър може да съобразим от фиг. 7. Вижда се, че:

$$\sqrt{a^2+R^2} = b - R \Rightarrow R = \frac{b^2-a^2}{2b}$$

или за критичното магнитно поле имаме:

$$B_g = \frac{m}{e}\frac{V_0^2}{R} = \frac{m}{e}\frac{2bV_0^2}{b^2-a^2}$$

4) както вече казахме магнитната сила на Лоренц не върши работа така, че скоростта на електроните ще се определя по същият начин както в подточка две:

$$V(r) = \sqrt{\frac{2eU\ln\frac{r}{a},}{m\ln\frac{b}{a}}}$$

тази скорост може да разложим на две съставящи, едната е успоредна на радиуса вектора (радиална скорост V_r) и една перпендикулярна на радиус вектора (тангенциална скорост V_ϕ). Изменението на проекцията по оста z на ъгловият момент на електрона по времето (dL/dt), ще се определя от компонента та на силата на Лоренц, която е перпендикулярна на радиус вектора, тоест силата породена от радиалната част на скоростта $(eV_rB) \Rightarrow$

$$\frac{dL}{dt} = eV_rBr = eBr\frac{dr}{dt}$$

последното равенство можем да запишем и така:

$$\frac{d}{dt}\left(L - \frac{eBr^2}{2}\right) = 0$$

$\Rightarrow L - \frac{eBr^2}{2} = const$ която константа можем да определим от момента в който електроните напущат вътрешният електрод с пренебрежимо малка скорост $\Rightarrow const = -eBa^2/2$ или за момента на електроните имаме:

$$L = \frac{eB(r^2-a^2)}{2}$$

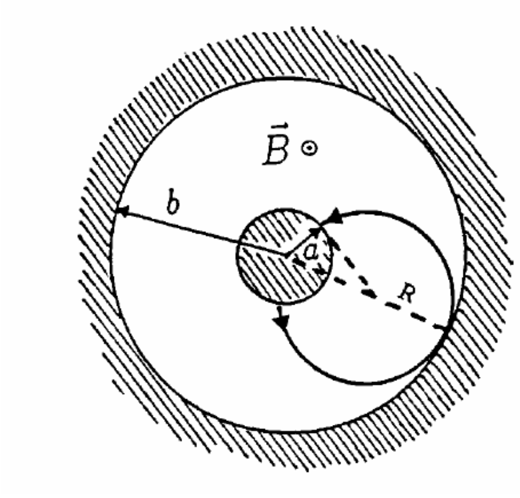
ясно е, че критичният случай при който електроните все още ще достигат външният цилиндър е когато електроните попадат на него тангенциално $(V_r(b) = 0)$

тогава момента на импулса на електроните в този момент е:

$$L = mbV_\phi = \frac{eB\left(r^2 - a^2\right)}{2}$$

а от закона за запазване на енергията и факта, че $V_r(b) = 0 \Rightarrow V_\phi(b) = V(b) = \sqrt{\frac{2eU}{m}} \Rightarrow$

$$m^2b^2V_\phi^2 = \frac{e^2B^2\left(r^2 - a^2\right)^2}{4} \Leftrightarrow \frac{e}{m} = \frac{8U^2b^2}{B^2\left(r^2 - a^2\right)^2}$$



Фигура 7.

6.

Тъй като по условие $V_0 \gg E_1x_1$ и $V_0 \gg E_2x_2$, то можем да считаме траекториите на частиците праволинейни навсякъде освен в областта непосредствено до процепа, където на частицата действа напречно поле, което изкривява траекторията им. Ще използваме теоремата на Гаус за кутията, която има форма на паралелепипед с дължина a по продължение на процепа, височина y и ширина x. Тогава потока през такава кутия по Гаус е нула (нямаме заряди). Нека в първо приближение интензитета на x-тата компонента на електричното поле се изменя линейно в процепа, тогава можем да запишем:

$$E_x(x) = c_1x + c_2$$

където c_1 и c_2 са константи който можем да намерим от условието на задачата. За $x = 0$ имаме $E_x = E_1 \Rightarrow c_2 = E_1$ а от $x = L \Rightarrow c_1 = (E_2 - E_1)/L \Rightarrow$

$$E_x(x) = \frac{(E_2 - E_1)}{L}x + E_1$$

тогава потока на x-тата компонента на полето през кутията е:

$$\Phi_x = [E_x(0) - E_x(x)]\,ay = (E_1 - E_x(x))\,ay = \frac{(E_2 - E_1)}{L}xay$$

а потока на y-тата компонента на полето през кутията е:

$$\Phi_y = E_yax$$

Сумата от двата потока е нула ($\Phi_x + \Phi_y = 0$) $\Rightarrow$

$$E_yax = -\frac{(E_2 - E_1)}{L}xay \Leftrightarrow E_y = -\frac{(E_2 - E_1)}{L}y$$

При преминаване през процепа частицата със заряд e изпитва сила $F_y = -\frac{e(E_2 - E_1)}{L}y$ и тя действа в продължение на време $T = L/v$, където $v = \sqrt{2eV_0/m}$. Тогава импулса предаден на частицата в направление y е:

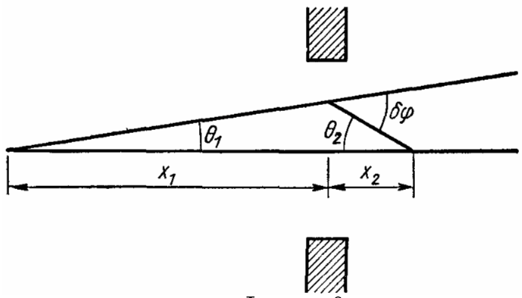
$$\Delta p = F_yT = -\frac{e\left(E_2 - E_1\right)}{v}y$$

Този импулс променя направлението на движение на малък ъгъл $\delta = \left|\frac{\Delta p}{P}\right| \Rightarrow$ частицата отново ще пресече оста x в точка x_2, за която $y = x_2\theta_2$. Замествайки $\theta_2 + \theta_1 = \delta \Rightarrow$

$$\frac{y}{x_2} + \frac{y}{x_1} = \frac{e\left(E_2 - E_1\right)}{Pv}y = \frac{E_2 - E_1}{2V_0}y$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1} = \frac{E_2 - E_1}{2V_0}$$



Фигура 8.