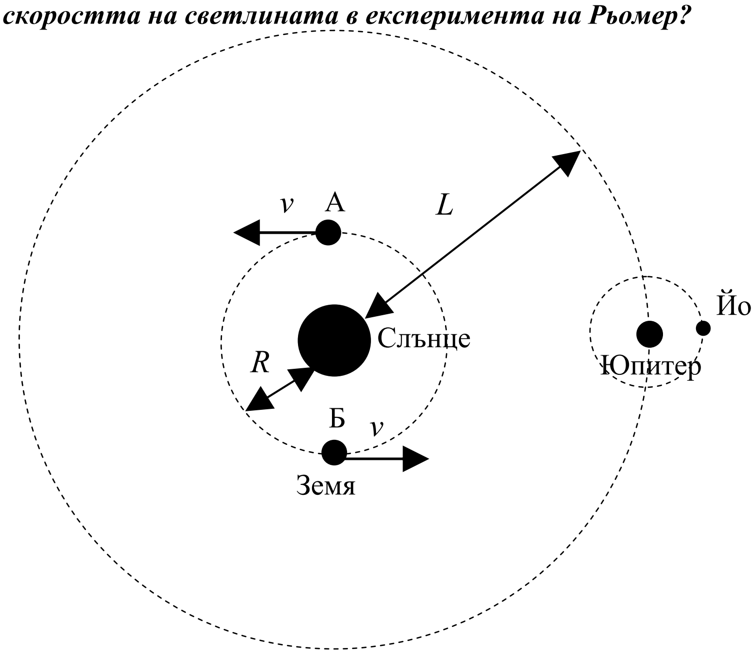
<u>Задача1. Скорост на светлината</u>

Скоростта на светлината във вакуум, обикновено обозначавана със C, е физична константа важно в много области на физиката. Ние сега ще разгледаме два известни исторически експеримента за определяне на скоростта на светлината във вакуум.

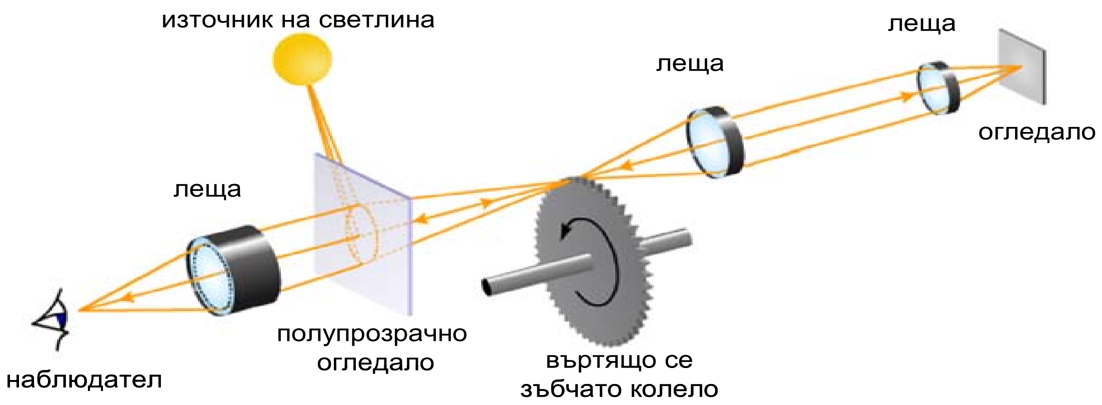
Част 1. През 17 век Датският астроном Олаф Рьомер първи измерва скоростта на светлината. Той забелязал, че през различно време на годината Йо (спътник на Юпитер) има различен период на обикаляне около Юпитер. Времето за две последователни излизания от сянката на Юпитер е различно в зависимост от времето през годината. Най-дълъг период на обикаляне (T_A) Йо има когато земята е в точка А от траекторията си и се отдалечава от Юпитер (*Фигура 3а*), а най-кратък период ($T_Б$) Йо има когато земята е в точка Б от траекторията си и се приближава към Юпитер (*Фигура 3а*). Ако скоростта с която се движи земята по кръгова орбита с радиус R е V, радиуса на орбитата на Юпитер е L то намерете:

а) Формула която изразява скоростта на светлината в експеримента на Рьомер?



Фигура 3а.

Забележка: пропорциите във Фигура 3а не са реални и фигурата служи само за да си представите задачата. Тоест когато правите пресмятанията пренебрегнете радиуса на Слънцето, Земята, Юпитер и орбитата на Йо около Юпитер в сравнение с R *и* L



Фигура 3б.

Част 2. Друг известен експеримент за определяна на C е опита на Физо. В опита на Физо лъч идващ от източник на светлина се отразява в полупрозрачно огледало, преминава през зъбците на въртящо се колело, изминава разстояние $L = 8{,}66\ \mathrm{km}$, отразява се от огледало и отново се връща към зъбчатото колело (*Фигура 3б*). Ако при връщането си светлината попада между зъбците на колелото то светлината се вижда от наблюдател а ако попада върху зъбите не се вижда. Намерете:

б) Стойността за скоростта на светлината в експеримента на Физо, ако на диска има $N = 720$ зъба с ширина равна на ширината на процепите между тях и светлината изцяло не се вижда от наблюдател при честота на въртене на колелото $\nu = 12{,}5 s^{-1}$?

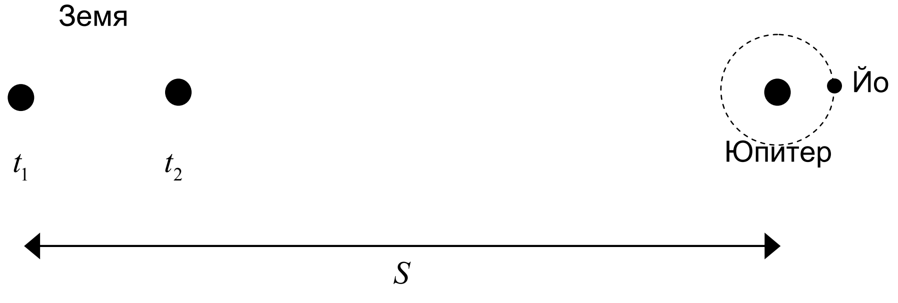
в) При каква честото на въртене на колелото светлината отново ще се вижда в максималната си стойност?

Задача 1. Скорост на светлината

Част 1. а) Рьомер разбира, че ефекта на различният период на обикаляне на Йо е заради крайната скорост на светлината.

Нека да видим как се е преместила Земята за две последователни излизания на Йо от сянката на Юпитер (*Фигура 3*). Нека първото излизане на Йо от сянката на Юпитер да става в момент t_1, а второто в момент t_2 тогава периода на обиколка на Йо около Юпитер за наблюдател който е на Юпитер ще е

$$T = t_2 - t_1$$



Фигура 3.

За наблюдател на Земята момента в който Йо изгрява за първи път е

$$t'_1 = t_1 + S/c$$

А момента в който Йо изгрява за втори път ще е

$$t'_2 = t_2 + \frac{S \pm V(t_2 - t_1)}{c}$$

Където знака - или + се определя от това дали Земята се движи в посока на Юпитер или бяга от нея, тогава може лесно да пресметнем периода на обикаляне на Йо около Юпитер когато Земята е в точки А и в точка Б:

$$T_А = T\left(1+\frac{V}{c}\right)$$

$$T_Б = T\left(1-\frac{V}{c}\right)$$

Или за скоростта на светлината имаме:

$$c = \frac{\left(T_А + T_Б\right)V}{T_А - T_Б}$$

Част 2. б) Нека за времето което светлината изминава пътя от зъбчатото колело до огледалото и обратно, зъбчатото колело да се е завъртяло така че на мястото на прореза има зъб. Тогава светлината изцяло се блокира и не се вижда от наблюдателя. ⇒

$$t = \frac{2L}{c} = \frac{1}{2N\nu} \Rightarrow$$

$$c = 4LN\nu$$

Или числено имаме:

$$c = 4.8,66km.720.12,5s^{-1} = 311760km/s$$

в) Ако за времето което светлината изминава пътя от зъбчатото колело до огледалото и обратно, зъбчатото колело се е преместило така, че вместо първия прорез се намира К-тия до него прорез то светлината отново е видима. Това става при следното равенство на времената и новата честота на въртене η на колелото:

$$t = \frac{2L}{c} = \frac{K}{N\eta},\ K = 1,2,3,... \Rightarrow$$

$$\eta = 2K\nu$$

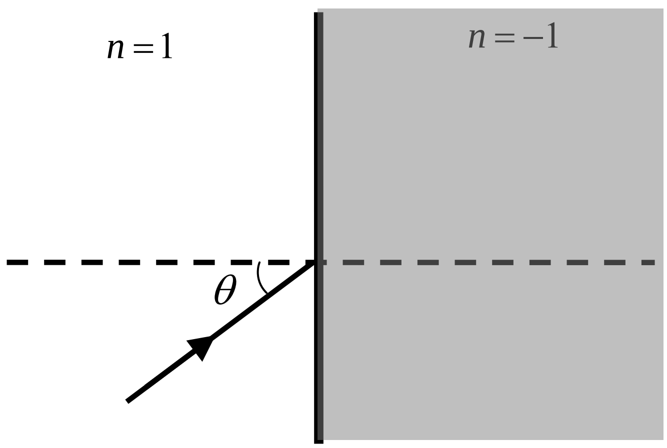
Задача2: *Метаматеряли*

Особено модерно в последното десетилетие е създаването на така наречените метаматериали. Това са изкуствени материали, проектирани да имат свойства, които не са достъпни в природата. Един типичен пример за метаматериал е материал с отрицателен показател на пречупване.

1 Метаматерали в класическата оптика

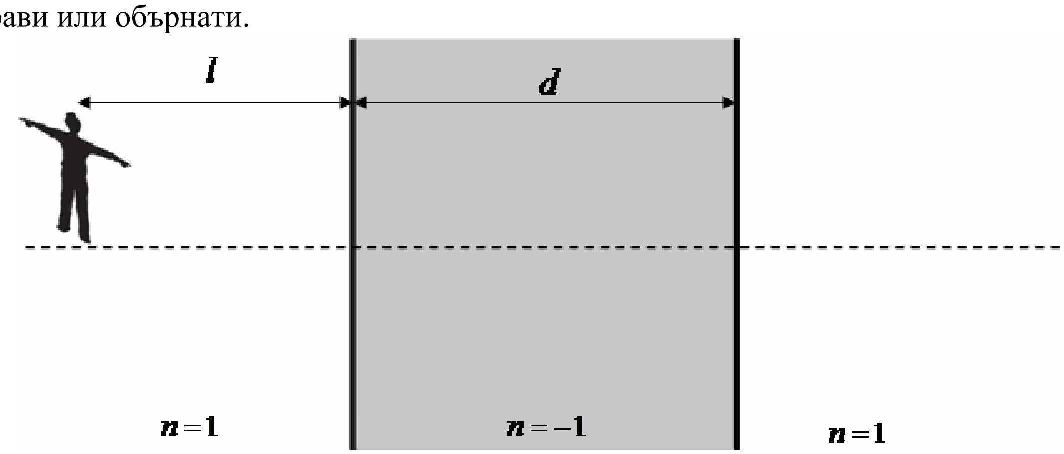
а) Като използвате връзката между диелектрична и магнитна проницаемост и показателя на пречупване $n = \sqrt{\dfrac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}}$ намерете показателя на пречупване за среда с диелектрична проницаемост $\varepsilon = -\varepsilon_0$ и магнитна проницаемост $\mu = -\mu_0$.

б) Продължете хода на лъча от Фигура 1 и кажете на колко е равен ъгълът на пречупване, ако средата отляво на равнината на падане е въздух с показател на пречупване $n = 1$, а отдясно средата е метаматериал с показател на пречупване $n = -1$.



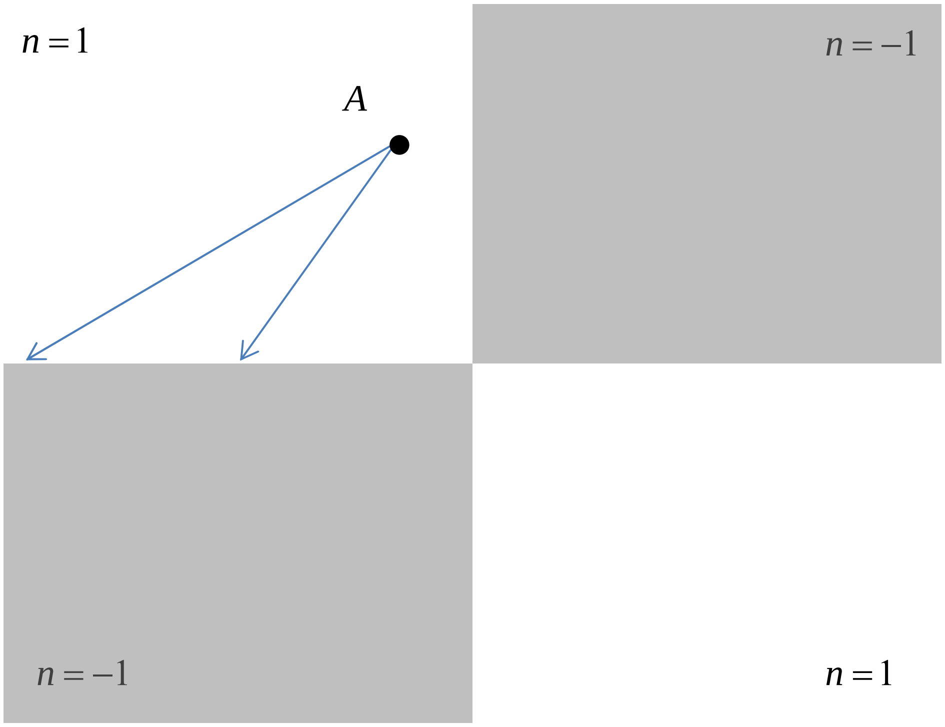
Фигура 1

в) Плоско паралелна пластина с дебелина d е направена от метаматериал с показател на пречупване $n = -1$ и е поставена във въздух с показател на пречупване $n = 1$. Във въздуха, на разстояние l ($l < d$) от първата стена на пластината, е поставен предмет (Фигура 2). Намерете образите на предмета и коментирайте дали са реални или не, дали са прави или обърнати.



Фигура 2

г) Намерете разстоянието на образите до втората стена на пластината.



Фигура 3

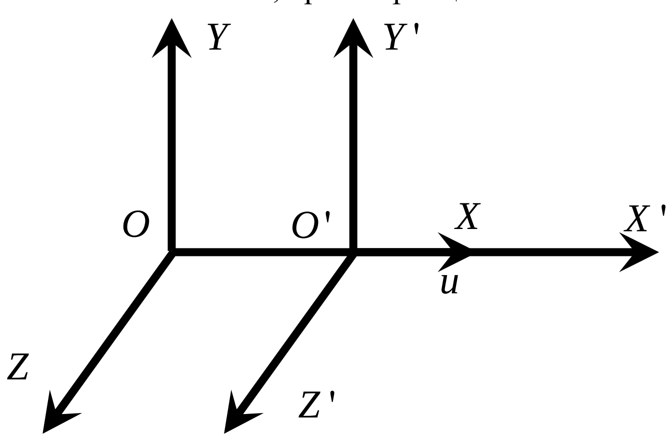
д) Начертайте ходовете на двата лъча от Фигура 3 и отбележете образите на източника А.

2 Метаматерали в релативиската оптика

Нека сега разгледаме отправна система K' която се движи с постоянна скорост u спрямо неподвижна система K. Нека скоростта u да е насочена по оста x и в момента $t=t'=0$ началото O' (начало на K') да съвпада с началото O (начало на K). Нека в точка от оправната система K, с координати x,y,z, в момента от време t става някакво събитие. Координатите x',y',z' и времето t' на събитието определени от наблюдател в K' са свързани в специалната теория на относителността, чрез Лоренцовите трансформации:

$$t'=\frac{t-xu/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}},$$

$$x'=\frac{x-ut}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \quad y'=y, \; z'=z$$



А импулса P_x,P_y,P_z и енергията E на частица в отправна система K са свързани с импулса P_x',P_y',P_z' и енергията E' за наблюдател в K', чрез Лоренцовите трансформации за импулс и енергия:

$$P_x' = \frac{P_x - Eu/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \quad P_y' = P_y, \; P_z' = P_z$$

$$E' = \frac{E - P_x u}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

е) използвайки Лоренцовите трансформации за импулс и енергия и разглеждайки фотона като частица с енергия $E = \hbar\omega$ изведете релативисткият ефект на Доплер (връзката между честота ω за наблюдател в K и честотата ω' за наблюдател в K').
ж) Ако сега средата има показател на пречупване $n = -1$ и имаме източник на светлина в отправна система K' и той излъчва фотони с честотата ω' отдалечавайки се успоредно на наблюдател в K, то намерете каква е честотата ω в отправна система K.
з) Ако сега средата има показател на пречупване $n = -1$ и имаме източник на светлина в отправна система K' и той излъчва фотони с честотата ω' приближавайки се успоредно на наблюдател в K, то намерете каква е честотата ω в отправна система K.
и) отново средата има показател на пречупване $n = -1$, но този път наблюдател от K вижда излъчването на светлината от източника, че става перпендикулярно на скоростта u. Намерете ω в отправна система K, ако източник на светлина в отправна система K' излъчва фотони с честотата ω'.
й) Заредена частица с енергия на покой E_0, движеща се праволинейно и равномерно със скорост $|u| > |c/n|$ през материална среда с показател на пречупване n, става източник на светлина (ефект на Вавилов-Черенков). Като използвате законите за запазване на енергията и импулса определете ъгъла ϑ, под който става това излъчване.
Упътване: При решаването на задачата допуснете, че енергията на излъчен фотон $\hbar\omega$ е много по-малка от енергията на покой на заредената частица ($\hbar\omega / E_0 \ll 1$). Какво е направлението на излъчване на фотоните ако $n > 0$ и ако $n < 0$.
к) В нелинейна кристална среда, която имат показател на пречупване n_ω за честота ω, и едновременно с това имат показател на пречупване $n_{2\omega}$ за честота 2ω, се раждат два фотона с честоти ω при удара на фотон с честоти 2ω в един от възлите на кристалната решетка. Определете посоката на фотоните с честота ω спрямо посоката на разпространение на фотона с честота 2ω, ако $n_\omega = 1$ а $n_{2\omega} = -1$.
Упътване: При решаването на задачата допуснете, че енергията на падналият фотон $\hbar\omega$ е много по-малка от енергията на покой на кристалният възел ($\hbar\omega / E_0 \ll 1$), тоест считайте че кристалният възел остава на място след удара.

а) диелектричната и магнитната проницаемост на средата може да запишем така

$$\varepsilon = -\varepsilon_0 = \varepsilon_0 \exp(i\pi)$$

$$\mu = -\mu_0 = \mu_0 \exp(i\pi)$$

Замествайки във връзката между диелектрична и магнитна проницаемост и показателя на пречупване $n = \sqrt{\dfrac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}}$ получаваме:

$$n = \sqrt{\frac{\varepsilon_0\mu_0 \exp(2i\pi)}{\varepsilon_0\mu_0}} = \sqrt{\exp(2i\pi)}$$

Последното уравнение има две решения

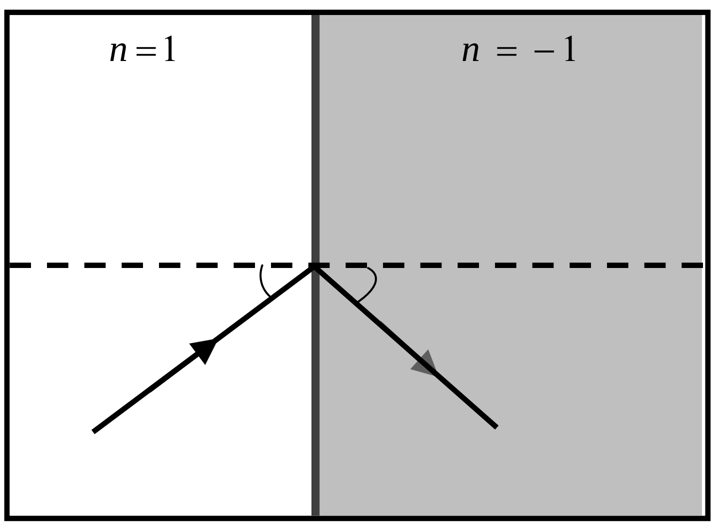
$$\boxed{n = \exp(2i\pi) = 1}$$

$$\boxed{n = \exp(i\pi) = -1}$$

б) От закона за пречупването имаме $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$ и конкретно за нашия случай:

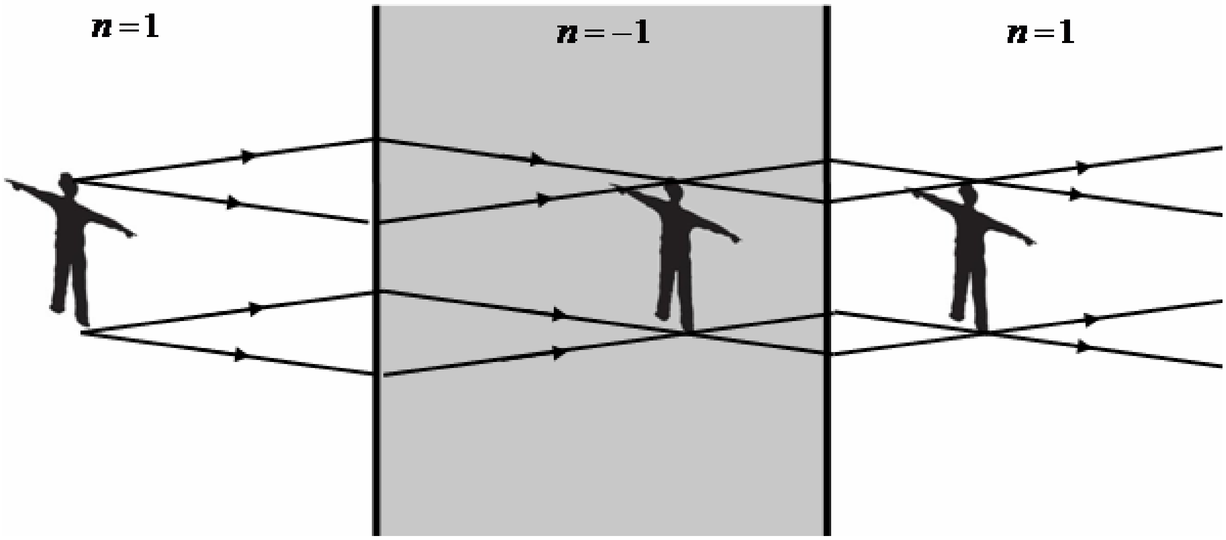
$$\sin\theta = -\sin\theta_2 \Rightarrow \boxed{\theta_2 = -\theta}$$

Тоест, ъгълът на пречупване е равен по големина на ъгъла на падане и двата ъгъла са от една и съща страна на нормалата - Фигура 2.

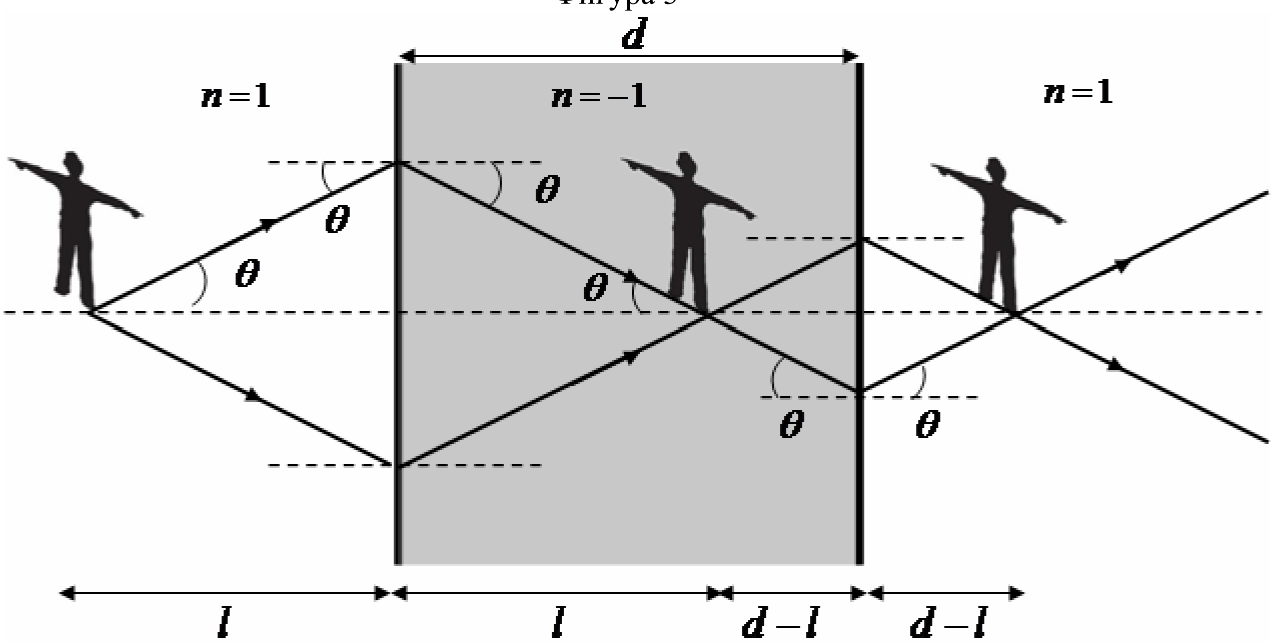


Фигура 2

в) чрез прости геометрични построения се вижда, че имаме два прави и реални образа (виж Фигура 3 и Фигура 4)



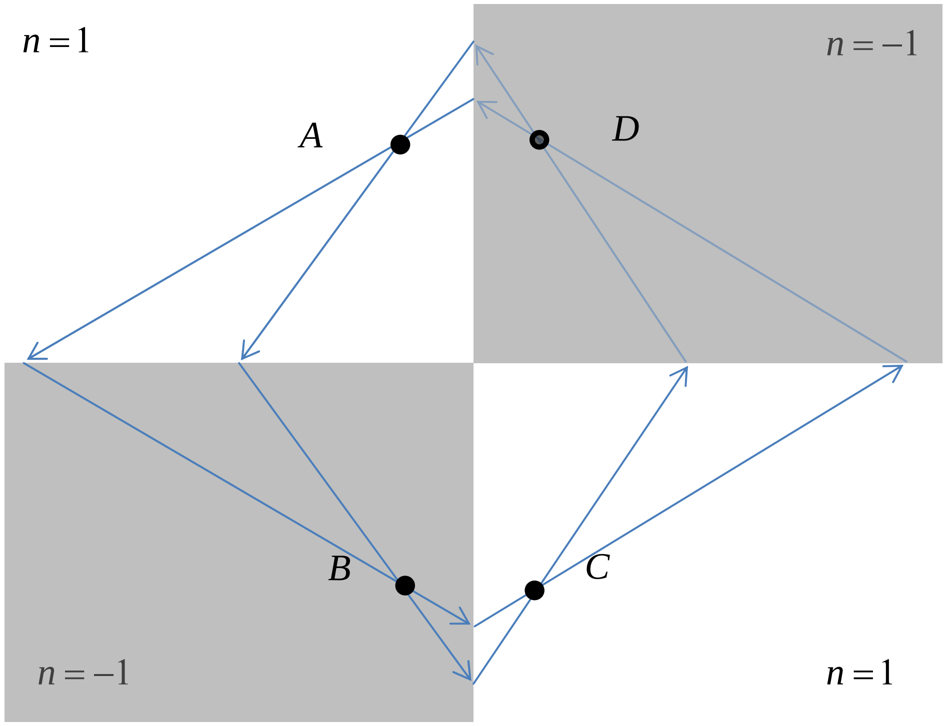
Фигура 3



Фигура 4

г) От Фигура 4 лесно се съобразява, че двата образа са на разстояние $\boxed{d-l}$ от втората стена на пластината.

д) Хода на лъчите е даден на Фигура 5



Фигура 5

е) Тръгваме от Лоренцовите трансформации за енергията

$$E' = \frac{E - P_x u}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

и заместваме $E = \hbar\omega, E' = \hbar\omega'$ а импулса с $P_x = P\cos\vartheta = \frac{nE}{c}\cos\vartheta \Rightarrow$

$$\omega' = \omega\frac{1-nu\cos\vartheta/c}{\sqrt{1-u^2/c^2}},$$

Където n е показателя на пречупване, ϑ е ъгълът под който наблюдател в K вижда фотоните спрямо оста x. $\Rightarrow$

$$\boxed{\omega = \omega'\frac{\sqrt{1-u^2/c^2}}{1-\dfrac{nu\cos\vartheta}{c}}}$$

ж) при $n=-1$ и $\vartheta=0$ (източника се приближава към наблюдателя в K) имаме

$$\omega = \omega'\frac{\sqrt{1-u^2/c^2}}{1+\dfrac{u}{c}} = \omega'\frac{\sqrt{(1-u/c)(1+u/c)}}{\sqrt{(1+u/c)^2}} = \boxed{\omega'\sqrt{\frac{1-u/c}{1+u/c}}}$$

Тоест имаме червено отместване и следователно ефект на Доплер е обърнат.

з) при $n=-1$ и $\vartheta=\pi$ (източника се отдалечава от наблюдателя в K) имаме

$$\omega = \omega'\frac{\sqrt{1-u^2/c^2}}{1-\dfrac{u}{c}} = \omega'\frac{\sqrt{(1-u/c)(1+u/c)}}{\sqrt{(1-u/c)^2}} = \boxed{\omega'\sqrt{\frac{1+u/c}{1-u/c}}}$$

Тоест имаме синьо отместване и следователно ефект на Доплер е отново обърнат.

и) при $\vartheta=\pi/2$ (напречен ефект на Доплер) имаме

$$\boxed{\omega = \omega' \sqrt{1 - u^2 / c^2}}$$

Тоест напречен ефект на Доплер е еднакъв за среди с отрицателен показател на пречупване и за среди с положителен показател на пречупване.
й) Записваме закона за запазване на енергията заедно с релативисткиат инвариант за енергията и импулса на частицата:

$$E_1 = E_\gamma + E_2 \Leftrightarrow E_2 = E_\gamma - E_1$$

$$E_1^2 = E_0^2 + P_1^2 c^2, \; E_2^2 = E_0^2 + P_2^2 c^2$$

където E_1, P_1 и E_2, P_2 са пълната релативистката енергия и импулса на частицата, съответно преди и след излъчването. E_0 е енергията на частицата в покой а E_γ е енергията на излъченият фотон. Ако повдигнем на квадрат закона за запазване на енергията и в него заместим енергията от релативисткият инвариант за енергията и импулса то имаме:

$$P_2^2 c^2 = P_1^2 c^2 + E_\gamma^2 - 2E_\gamma E_1$$

а от закона за запазване на импулса имаме

$$P_2^2 = P_\gamma^2 + P_1^2 - 2P_\gamma P_1 \cos\vartheta$$

след като умножим горното равенство с c^2 и отчетем, че $P_\gamma = nE_\gamma / c$, получаваме:

$$P_2^2 c^2 = E_\gamma^2 n^2 + P_1^2 c^2 - 2ncE_\gamma P_1 \cos\vartheta$$

последното уравнение вадим от $P_2^2 c^2 = P_1^2 c^2 + E_\gamma^2 - 2E_\gamma E_1 \Rightarrow$

$$\left(n^2 - 1\right)\frac{E\gamma}{2E_1} + 1 = \frac{ncP_1}{E_1}\cos\vartheta$$

сега можем да отчетем, че $E_\gamma / E_1 \ll 1 \Rightarrow$

$$\boxed{\cos\vartheta = \frac{E_1}{ncP_1} = \frac{c}{nu}}$$

следователно за $n > 0, \cos\vartheta > 0$ и излъчването е насочена по посока на движение на заредената частица а при $n < 0, \cos\vartheta < 0$ и излъчването е насочена по посока обратна на движение на заредената частица.

к) Понеже удара на фотона с честота 2ω е в решетката на кристала, то импулса и енергията които придобива кристала може да пренебрегнем сравнение с енергията на фотона. От съображение за симетрия и закона за запазване на импулса имаме, че двата новородени фотона с честота ω трябва да се движат под еднакви ъгли α спрямо първоначалната посока на фотона с честота 2ω.
От закона за запазване на импулса имаме:

$$P_{2\omega} = 2P_\omega \cos\alpha$$

От закона за запазване на енергията имаме:

$$E_{2\omega} = 2E_\omega$$

Също така имаме връзката между енергия и импулс на фотона с честота 2ω и фотоните с честота ω

$$\left.\begin{aligned} E_{2\omega} &= \frac{P_{2\omega}c}{n_{2\omega}} \\ E_{\omega} &= \frac{P_{\omega}c}{n_{\omega}} \end{aligned}\right. \Rightarrow$$

$$\frac{P_{2\omega}c}{n_{2\omega}} = 2\frac{P_{\omega}c}{n_{\omega}}$$

И окончателно за ъгъла α имаме

$$\cos\alpha = \frac{n_{2\omega}}{n_{\omega}} = -1 \Rightarrow \boxed{\alpha = \pi}$$

Тоест фотоните с честота ω се движат в обратна посока на падналият фотон с честота 2ω (действа като нелинейно огледало).