

Електродинамика

Андон Рангелов, кабинет В 39, email: rangelov@phys.uni-sofia.bg, интернет страница на курса <http://ed.quantum-bg.org/>

Лоренцовите трансформации за четиримерният вектор на енергията и импулса $(P_x, P_y, P_z, E/c)$ при преминаване от лабораторна отправна система S в система S' движеща се със скорост u по посока на x се дават като:

$$P'_x = \frac{P_x - Eu/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad P'_y = P_y, \quad P'_z = P_z,$$
$$E' = \frac{E - P_x u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.$$

Величината която се запазва при преминаване от една система в друга е

$$E^2 - c^2 P^2 = (E')^2 - c^2 (P')^2 = E_0^2 = inv.$$

Където E_0 е енергията в отправна система в която нямаме движение. Последната формула записана за фотона изглежда така:

$$E^2 - c^2 P^2 = 0 \Leftrightarrow E = cP.$$

Задачи:

1.1

Изменението на честотата на електромагнитната вълна при преминаване от една отправна система в друга в оптиката е известна като ефект на Доплер. Получете формулата за релятивисткият ефект на Доплер, ако разгледате фотона като частица с енергия $E = h\nu$.

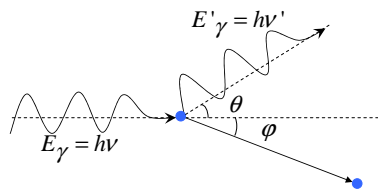
Указание: Нека в неподвижна отправна система S , свързана с източника, Фотона има енергия $E = h\nu$. Нека отправната система на наблюдателя (S') да се движи със скорост u по посока на x . За наблюдателя посоката на разпространение на фотона сключва ъгъл θ' с оста x' . Използвайте и трансформациите за енергията, за да намерите честотата на фотона в отправна система S' .

1.2

Ефект на Комптън се нарича процеса на разсейване на фотон от свободен електрон. Нека фотон с енергия $E = h\nu$ се разсейва под ъгъл θ , спрямо правоначалното си разпространение, от свободен електрон (фиг. 1). Определете:

- Нарастването на дължината на вълната на разсеяният фотон;
- Енергията и импулса на разсеяният фотон;
- Ъгъла φ между посоката на падащият фотон и посоката, в която започва да се движи електрона.

Упътване: Използвайте законите за запазване на енергията и импулса, както и релятивисткият инвариант за енергията и импулса.



Фигура 1:

1.3

Заредена частица, движеща се праволинейно и равномерно със скорост u през материална среда с показател на пречупване n , при определени условия може да излъчва светлина (ефект на Вавилов-Черенков). Като използвате законите за запазване на енергията и импулса определете ъгъла θ , под който става това излъчване.

Упътване: Импулса на фотона разпространяващ се в материална среда с показател на пречупване n е $h\nu/c'$, където $c' = c/n$ е фазовата скорост на светлината в средата.

Излъчването на Вавилов-Черенков не е свързано с изменение на вътрешното състояние на частицата (с нейната енергия на покой). При решаването на задачата допуснете, че $h\nu/E_0 \ll 1$.

1.4

Ако за предишната задача имате метаматериал с отрицателен показател на пречупване, то кажете в каква посока ще стане излъчването на Вавилов-Черенков?

1.5

От фотон с достатъчно висока енергия могат да се родят двойка електрон-позитрон. Такъв процес е бил предсказан от Дирак. Като използвате закона за запазване на енергията и закона за запазване на импулса покажете, че такъв процес е възможен само, ако в него участва още една частица.

1.6

Докажете, че при зададена пълен импулс, пълната енергия на система от частици е минимална, когато те се движат с еднакви скорости в една и съща посока.

1.7

Използвайки резултата от задачи 1.5 и 1.6 намерете праговата (минималната) енергия на фотона при която се ражда двойка електрон-позитрон в полето на първоначално неподвижен електрон.

Решения:

1.1

Ползваме Лоренцовата трансформация за енергията:

$$E = \frac{E' - P'_x u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

където $P'_x = P' \cos \theta = (E'/c) \cos \theta$ след заместване в горното равенство и отчитане на това, че енергията на фотона се дава с $E = h\nu$ в отправна система S и $E' = h\nu'$ в лабораторната система $S' \Rightarrow$

$$E = h\nu' \frac{1 - \frac{u}{c} \cos \theta}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = h\nu$$

\Rightarrow

$$\nu' = \nu \frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 - \frac{u}{c} \cos \theta}$$

Ефекта на Доплер е максимален когато $\theta = 0$ или $\theta = \pi$. При $\theta = 0$ имаме

$$\nu' = \nu \frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 - \frac{u}{c}} = \nu \sqrt{\frac{1 + u/c}{1 - u/c}}$$

тоест така нареченото виолетово отместване. При $\theta = \pi$ имаме

$$\nu' = \nu \frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 + \frac{u}{c}} = \nu \sqrt{\frac{1 - u/c}{1 + u/c}}$$

това е така нареченото червено отместване.

Имаме и напречен ефект на Доплер, когато $\theta = \pi/2$ (фотона се движи перпендикулярно на посоката на движение на наблюдателя) тогава имаме

$$\nu' = \nu \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

тъй като в повечето случаи $u/c \ll 1$ то напречният ефект на Доплер се регистрира по-трудно сравнение с надлъжният ефект на Доплер.

1.2

Записваме закона за запазване на енергията и закона за запазване на импулса, за релятивистката система електрон фотон:

$$\vec{P}_\gamma = \vec{P}'_\gamma + \vec{P}_e, \quad E_\gamma + E_0 = E'_\gamma + E_e,$$

където \vec{P}_γ и E_γ са импулса и енергията на падащият фотон, \vec{P}'_γ и E'_γ са импулса и енергията на разсеяния фотон, \vec{P}_e , E_e и E_0 са импулса, пълната релятивистка енергия и енергията в покой на електрона. От закона за запазване на импулса изразяваме $\vec{P}_e \Rightarrow$

$$\vec{P}_e = \vec{P}_\gamma - \vec{P}'_\gamma,$$

след което повдигаме на квадрат последното равенство \Rightarrow

$$\vec{P}_e^2 = \vec{P}_\gamma^2 + (\vec{P}'_\gamma)^2 - 2\vec{P}_\gamma \cdot \vec{P}'_\gamma = P_\gamma^2 + (P'_\gamma)^2 - 2P_\gamma P'_\gamma \cos \theta,$$

където ъгъл θ е ъгъла под който се е отклонил фотона спрямо правоначалната си посока на разпространение. Последното уравнение умножаваме по c^2 и отчитаме, че за фотона $P_\gamma = E_\gamma/c$ както и $P'_\gamma = E'_\gamma/c \Rightarrow$

$$P_e^2 c^2 = E_\gamma^2 + (E'_\gamma)^2 - 2E_\gamma \cdot E'_\gamma \cos \theta,$$

сега изразяваме енергията на електрона от закона за запазване на енергията \Rightarrow

$$E_e = E_\gamma + E_0 - E'_\gamma,$$

и повдигаме последното уравнение на квадрат \Rightarrow

$$E_e^2 = E_\gamma^2 + E_0^2 + (E'_\gamma)^2 - 2E_\gamma E'_\gamma + 2E_0 E_\gamma - 2E_0 E'_\gamma,$$

от уравнението за $P_e^2 c^2$ вадим подчленно уравнението за $E_e^2 \Rightarrow$

$$\underbrace{P_e^2 c^2 - E_e^2}_{=-E_0^2} = E_\gamma^2 + (E'_\gamma)^2 - 2E_\gamma E'_\gamma \cos \theta - E_\gamma^2 - E_0^2 - (E'_\gamma)^2 + 2E_\gamma E'_\gamma - 2E_0 E_\gamma + 2E_0 E'_\gamma,$$

където сме използвали релятивисткият инвариант за електрона ($E_e^2 - P_e^2 c^2 = E_0^2$) \Rightarrow

$$2E_\gamma E'_\gamma (1 - \cos \theta) - 2E_0 (E_\gamma - E'_\gamma) = 0.$$

\Rightarrow

$$E_\gamma E'_\gamma (1 - \cos \theta) = E_0 (E_\gamma - E'_\gamma).$$

Накрая използваме съотношенията $E = h\nu = hc/\lambda$, $E' = h\nu' = hc/\lambda'$, $E_0 = m_e c^2$ както и $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda \Rightarrow$

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta).$$

За енергията на разсеният фотон имаме

$$E'_\gamma = \frac{E_\gamma}{1 + E_\gamma (1 - \cos \theta) / (m_e c^2)},$$

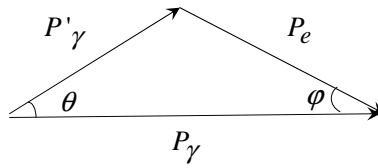
$$P'_\gamma = E'_\gamma / c = \frac{E_\gamma / c}{1 + E_\gamma (1 - \cos \theta) / (m_e c^2)}.$$

от триъгълника на фиг. 2 определяме ъгъла φ под който излита електрона:

$$\cot \varphi = \frac{P_\gamma - P'_\gamma \cos \theta}{P'_\gamma \sin \theta} = \frac{P_\gamma / P'_\gamma - \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\lambda / \lambda' - \cos \theta}{\sin \theta}$$

\Rightarrow

$$\cot \varphi = \frac{1 + \Delta\lambda / \lambda' - \cos \theta}{\sin \theta} = \left(1 + \frac{E_\gamma}{m_e c^2} \right) \tan \frac{\theta}{2}$$



Фигура 2:

1.3

Записваме закона за запазване на енергията заедно с релятивисткият инвариант за енергията и импулса на частицата:

$$E_1 = E_\gamma + E_2 \Leftrightarrow E_2 = E_\gamma - E_1,$$

$$E_1^2 = E_0^2 + P_1^2 c^2, \quad E_2^2 = E_0^2 + P_2^2 c^2,$$

където E_1, P_1 и E_2, P_2 са пълната релятивистката енергия и импулса на частицата, съответно преди и след излъчването. E_0 е енергията на частицата в покой а E_γ е енергията на излъченият фотон. Ако повдигнем на квадрат закона за запазване на енергията и в него заместим енергията от релятивисткият инвариант за енергията и импулса то имаме:

$$P_2^2 c^2 = P_1^2 c^2 + E_\gamma^2 - 2E_\gamma E_1$$

а от закона за запазване на импулса (виж фиг. 3) имаме

$$P_2^2 = P_\gamma^2 + P_1^2 - 2P_\gamma P_1 \cos \theta$$

след като умножим горното равенство с c^2 и отчетем, че $P_\gamma = nE_\gamma/c$, получаваме:

$$P_2^2 c^2 = E_\gamma^2 n^2 + c^2 P_1^2 - 2ncP_1 E_\gamma \cos \theta$$

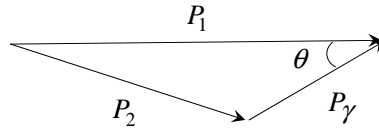
последното уравнение вадим от $P_2^2 c^2 = P_1^2 c^2 + E_\gamma^2 - 2E_\gamma E_1 \Rightarrow$

$$(n^2 - 1) \frac{E_\gamma}{2E_1} + 1 = \frac{ncP_1}{E_1} \cos \theta$$

сега можем да отчетем, че $E_\gamma/E_1 \ll 1 \Rightarrow$

$$\cos \theta \approx \frac{E_1}{ncP_1} = \frac{c}{nu}$$

следователно $\cos \theta > 0$ и излъчването е насочено по посока на движение на заредената частица.



Фигура 3:

1.4

Когато имаме метаматериал то посоката на излъчване на фотон за ефекта на Вавилов-Черенков е в обратна посока спрямо посоката в която се движи частицата и това се вижда от формулата:

$$\cos \theta \approx \frac{c}{nu} = -\frac{c}{|n|u}$$

$\Rightarrow \cos \theta < 0$.

1.5

Нека да допуснем, че процеса на раждане на позитрон и електрон от фотон е възможен без да имаме друга частица. Тогава можем да запишем закона за запазване на енергията и импулса в отправна система в която позитрона или електрона са в покой, след раждането си. Нека за определеност изберем система в която позитрона е в покой \Rightarrow

$$\begin{aligned} P_\gamma &= P_{-e}, \\ E_\gamma &= E_{-e} + E_0. \end{aligned}$$

ако повдигнем на квадрат двете равенства и умножим горното с c^2 то имаме:

$$\begin{aligned} c^2 P_\gamma^2 &= c^2 P_{-e}^2, \\ E_\gamma^2 &= E_{-e}^2 + E_0^2 + 2E_{-e}E_0. \end{aligned}$$

ползвайки релативисткият инвариант за енергията и импулса за фотона и електрона имаме:

$$\begin{aligned} E_\gamma^2 &= E_{-e}^2 - E_0^2, \\ E_\gamma^2 &= E_{-e}^2 + E_0^2 + 2E_{-e}E_0. \end{aligned}$$

след като извадим почленно последните две уравнения то имаме:

$$2E_{-e}E_0 = -2E_0^2,$$

\Rightarrow

$$E_{-e} = -E_0,$$

но нямаме отрицателна енергия така, че стигаме до противоречие. Това противоречие се състои в това, че не можем едновременно да изпълним закона за запазване на енергията и закона за запазване на импулса \Rightarrow процеса на раждане на позитрон и електрон е невъзможен без наличието на друга частица.

1.6

От релятивисткият инвариант за системата от частици изразяваме пълната енергия в лабораторната отправна система:

$$E^2 = P^2 c^2 + E_c^2$$

където E_c е енергията на системата в отправна система в която центъра на масите е в покой. По условие пълният импулс е фиксиран така, че пълната енергията ще е минимална когато минимална е енергията E_c . Записваме E_c :

$$E_c = \sum (m_{0i} c^2 + T_{ci})$$

където m_{0i} е масата на покой на i -тата частица, а T_{ci} е кинетичната енергия на i -тата частица в система център на масите. Тъй като кинетичната енергия на отделните частици е положителна, то E_c ще е минимална ако за всяка частица имаме $T_{ci} = 0$, тоест когато в система център на масите всички частици са неподвижни. В лабораторната система това значи, че всички частици се движат с еднаква скорост в една и съща посока.

1.7

От предишната задача имаме, че праговата енергия на фотона ще е тази при която след реакцията и трите частици ще се движат с еднаква скорост в една и съща посока (посоката на падалия фотон). От закона за запазване на импулса и енергията следва:

$$\begin{aligned} P_\gamma &= 3P, \\ E_\gamma + E_0 &= 3E, \end{aligned}$$

където P_γ е импулса на падащия фотон, а P е импулса на всяка една от частиците след раждането на позитрона и електрона. Използвайки релятивисткият инвариант получаваме:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{c} \sqrt{E^2 - E_0^2}, \\ P_\gamma &= \frac{E_\gamma}{c} \end{aligned}$$

\Rightarrow

$$E_\gamma = 4E_0.$$