Електродинамика

Андон Рангелов, кабинет В 39, email: rangelov@phys.uni-sofia.bg, интернет страница на курса `http://ed.quantum-bg.org/`

Уравненията на Максуел не са инвариантни относно трансформации на Галилей, но са инвариантни (еднакви във всички инерциалнаи отправни системи) при трансформации на Лоренц.
Нещо повече в специалната теория на относителността се показва, че електричното и магнитното поле се трансформират аналогично на пространствените координатите и времето при трансформации на Лоренц:

$$
\begin{aligned}
E'_x &= E_x, \;\; B'_x = B_x, \\
E'_y &= \frac{E_y - uB_z}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, \; B'_y = \frac{B_y + uE_z/c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, \\
E'_z &= \frac{E_z + uB_y}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, \; B'_z = \frac{B_z - uE_y/c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}.
\end{aligned}
$$

където примованите електрични и магнитни полета са в инерциална отправна система движеща се със скорост u по оста x на лабораторната отправна система (не примованите електрични и магнитни полета се отнасят за нея). Горните формули могат да се запишат и по-кратко във векторна форма като:

$$
\begin{aligned}
\vec{E}'_{\parallel} &= \vec{E}_{\parallel}, \;\; \vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel}, \\
\vec{E}'_{\perp} &= \frac{\vec{E}_{\perp} + \left(\vec{u}\times\vec{B}\right)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, \; \vec{B}'_{\perp} = \frac{\vec{B}_{\perp} - \left(\vec{u}\times\vec{E}\right)/c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}.
\end{aligned}
$$

където индекса $\parallel$ означава по посока на скоростта $\vec{u}$ а индекса $\perp$ означава перпендикулярно на $\vec{u}$.

Имаме комбинации на електричното и магнитното поле, който са едни и същи за всяка инерциална отправна система (инварианти), като:

$$
\begin{aligned}
\vec{E}.\vec{B} &= \vec{E}'.\vec{B}' = inv, \\
\vec{E}^2 - c^2\vec{B}^2 &= \left(\vec{E}'\right)^2 - c^2\left(\vec{B}'\right)^2 = inv.
\end{aligned}
$$

Задачи:

1.1

Покажете, че ако в инерциална отправна система S имате само електрично поле то в друга инерциална отправна система S' движеща се равномерно със скорост u спрямо S, ще имате следната връзка между електричното и магнитното поле:

$$\vec{B}' = -\left(\vec{u}\times\vec{E}'\right)/c^2.$$

1.2

Покажете, че действително скаларното произведение на електричното с магнитното поле е еднакво за всяка инерциална отправна система ($\vec{E}.\vec{B} = \vec{E}'.\vec{B}' = inv$).

1.3

Покажете, че действително $\vec{E}^2 - c^2\vec{B}^2 = \left(\vec{E}'\right)^2 - c^2\left(\vec{B}'\right)^2 = inv$

Упътване: запишете в една отправна система горното равенство и го трансформирайте в друга отправна система, като може да ползвате и формулата $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)^2 = (\vec{a})^2\left(\vec{b}\right)^2 - \left(\vec{a}.\vec{b}\right)^2$

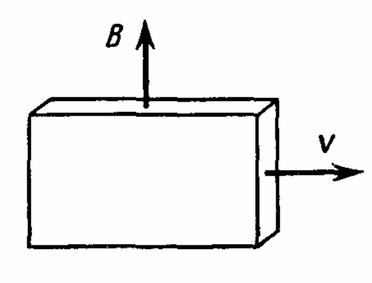
1.4

От закона за преобразуване на електричното и магнитното поле получете приближени формули, когато $u << c$.

1.5

Ако метална пластинка се движи с постоянна не релативистка скорост u перпендикулярно на магнитното поле B (фиг.1), то намерете плътността на заряда който ще се натрупа върху стените на пластинката.

Упътване: ползвайте резултата от задача 1.4 и минете в отправна система в която пластинката е в покой.



Фигура 1:

1.6

Не релативистка частица със заряд q се движи във вакуум с постоянна скорост u. Намерете, с помощта на Лоренцовите преобразованията на полето, формула за магнитното поле B което създава движещата се частица.

Упътване: за да получите магнитното поле то разгледайте задачата спрямо две отправни системи, лабораторна и в която частицата е в покой.

1.7

Намерете големината на електричното поле, което създава релативистка частица движеща се във вакуум със скорост u (спрямо лабораторната система) ако частицата има заряд q.

Решения:

1.1

Ползваме трансформациите:

$$\begin{aligned}\vec{E}'_{\parallel} &= \vec{E}_{\parallel}, \;\; \vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel}, \\ \vec{E}'_{\perp} &= \frac{\vec{E}_{\perp} + \left(\vec{u} \times \vec{B}\right)}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \; \vec{B}'_{\perp} = \frac{\vec{B}_{\perp} - \left(\vec{u} \times \vec{E}\right)/c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}.\end{aligned}$$

като отчетем, че $\vec{B}_{\parallel} = 0$, $\vec{B}_{\perp} = 0$ то имаме

$$\begin{aligned}\vec{E}'_{\parallel} &= \vec{E}_{\parallel}, \;\; \vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel} = 0, \\ \vec{E}'_{\perp} &= \frac{\vec{E}_{\perp}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \; \vec{B}'_{\perp} = -\frac{\left(\vec{u} \times \vec{E}\right)/c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}.\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\vec{B}'_{\perp} = -\frac{\left(\vec{u} \times \vec{E}\right)/c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = -\left(\vec{u} \times \vec{E}'\right)/c^2$$

$\Rightarrow$

$$\vec{B}' = -\left(\vec{u} \times \vec{E}'\right)/c^2$$

1.2

Нека в примованата система вземем скаларното произведението на електричното и магнитното поле ($\vec{E}'.\vec{B}'$) тогава имаме:

$$\vec{E}'.\vec{B}' = \left(\vec{E}'_{\parallel} + \vec{E}'_{\perp}\right).\left(\vec{B}'_{\parallel} + \vec{B}'_{\perp}\right) = \vec{E}'_{\parallel}.\vec{B}'_{\parallel} + \vec{E}'_{\perp}.\vec{B}'_{\perp}$$

но:

$$\begin{aligned}\vec{E}'_{\parallel} &= \vec{E}_{\parallel}, \;\; \vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel}, \\ \vec{E}'_{\perp} &= \frac{\vec{E}_{\perp} + \left(\vec{u} \times \vec{B}\right)}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \; \vec{B}'_{\perp} = \frac{\vec{B}_{\perp} - \left(\vec{u} \times \vec{E}\right)/c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}.\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\vec{E}'.\vec{B}' &= \vec{E}_{\parallel}.\vec{B}_{\parallel} + \vec{E}'_{\perp}.\vec{B}'_{\perp} = \vec{E}_{\parallel}.\vec{B}_{\parallel} + \frac{\vec{E}_{\perp} + \left(\vec{u} \times \vec{B}\right)}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}.\frac{\vec{B}_{\perp} - \left(\vec{u} \times \vec{E}\right)/c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \\ &= \vec{E}_{\parallel}.\vec{B}_{\parallel} + \frac{\vec{E}_{\perp}.\vec{B}_{\perp} - \underbrace{\vec{E}_{\perp}.\left(\vec{u} \times \vec{E}_{\perp}\right)/c^2}_{=0} + \underbrace{\left(\vec{u} \times \vec{B}_{\perp}\right).\vec{B}_{\perp}}_{=0} - \left(\vec{u} \times \vec{B}\right).\left(\vec{u} \times \vec{E}\right)/c^2}{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \\ &= \vec{E}_{\parallel}.\vec{B}_{\parallel} + \frac{\vec{E}_{\perp}.\vec{B}_{\perp} - \left(\vec{u} \times \vec{B}_{\perp}\right).\left(\vec{u} \times \vec{E}_{\perp}\right)/c^2}{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \vec{E}_{\parallel}.\vec{B}_{\parallel} + \frac{\vec{E}_{\perp}.\vec{B}_{\perp} - \vec{E}_{\perp}.\vec{B}_{\perp}u^2/c^2}{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \\ &= \vec{E}_{\parallel}.\vec{B}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp}.\vec{B}_{\perp} = \vec{E}.\vec{B}\end{aligned}$$

от $\vec{E}.\vec{B} = inv \Rightarrow$ че ако в една отправна система $\vec{E}$ е $\perp$ на $\vec{B}$ ($\vec{E}.\vec{B} = 0$) то и във всяка друга отправна система това ще е така.

1.3

Аналогично на предишната задача почваме от $\left(\vec{E}'\right)^2 - c^2\left(\vec{B}'\right)^2$ след което ползваме формулите за преобразуване на електричното и магнитното поле:

$$\left(\vec{E}'\right)^2 - c^2\left(\vec{B}'\right)^2 = \left(\vec{E}'_\parallel + \vec{E}'_\perp\right).\left(\vec{E}'_\parallel + \vec{E}'_\perp\right) - c^2\left(\vec{B}'_\parallel + \vec{B}'_\perp\right).\left(\vec{B}'_\parallel + \vec{B}'_\perp\right) = \left(\vec{E}'_\parallel\right)^2 + \left(\vec{E}'_\perp\right)^2 - c^2\left(\vec{B}'_\parallel\right)^2 - c^2\left(\vec{B}'_\perp\right)^2 =$$

$$= \left(\vec{E}_\parallel\right)^2 - c^2\left(\vec{B}_\parallel\right)^2 + \left(\frac{\vec{E}_\perp + \left(\vec{u}\times\vec{B}_\perp\right)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right).\left(\frac{\vec{E}_\perp + \left(\vec{u}\times\vec{B}_\perp\right)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right) - c^2\left(\frac{\vec{B}_\perp - \left(\vec{u}\times\vec{E}_\perp\right)/c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right).\left(\frac{\vec{B}_\perp - \left(\vec{u}\times\vec{E}_\perp\right)/c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right) =$$

$$= \left(\vec{E}_\parallel\right)^2 - c^2\left(\vec{B}_\parallel\right)^2 + \frac{\vec{E}_\perp^2 + \underbrace{2\vec{E}_\perp.\left(\vec{u}\times\vec{B}_\perp\right)}_{=2\vec{B}_\perp.\left(\vec{E}_\perp\times\vec{u}\right)=-2\vec{B}_\perp.\left(\vec{u}\times\vec{E}_\perp\right)} + \left(\vec{u}\times\vec{B}_\perp\right)^2 - \vec{B}_\perp^2 c^2 + 2\vec{B}_\perp.\left(\vec{u}\times\vec{E}_\perp\right) - \left(\vec{u}\times\vec{E}_\perp\right)^2/c^2}{1-\frac{u^2}{c^2}} =$$

$$= \left(\vec{E}_\parallel\right)^2 - c^2\left(\vec{B}_\parallel\right)^2 + \frac{\vec{E}_\perp^2 - (\vec{u})^2\left(\vec{E}_\perp\right)^2/c^2 + \left(\underbrace{\vec{u}.\vec{E}_\perp}_{=0}\right)^2/c^2 + (\vec{u})^2\left(\vec{B}_\perp\right)^2 - \left(\underbrace{\vec{u}.\vec{B}_\perp}_{=0}\right)^2 - \vec{B}_\perp^2 c^2}{1-\frac{u^2}{c^2}} =$$

$$= \left(\vec{E}_\parallel\right)^2 - c^2\left(\vec{B}_\parallel\right)^2 + \vec{E}_\perp^2 - \vec{B}_\perp^2 c^2 = \left(\vec{E}\right)^2 - c^2\left(\vec{B}\right)^2$$

където сме ползвали

$$\left(\vec{u}\times\vec{B}_\perp\right)^2 = (\vec{u})^2\left(\vec{B}_\perp\right)^2 - \left(\vec{u}.\vec{B}_\perp\right)^2$$
$$\left(\vec{u}\times\vec{E}_\perp\right)^2/c^2 = (\vec{u})^2\left(\vec{E}_\perp\right)^2/c^2 - \left(\vec{u}.\vec{E}_\perp\right)^2/c^2$$

едно следствие от $\left(\vec{E}'\right)^2 - c^2\left(\vec{B}'\right)^2 = \vec{E}^2 - c^2\vec{B}^2$ е че ако в дадена инерциална отправна система имаме следната връзка $\vec{E}^2 = c^2\vec{B}^2$ то тя се запазва във всяка друга инициала отправна система ($\left(\vec{E}'\right)^2 = c^2\left(\vec{B}'\right)^2$).

1.4

От формулите

$$\begin{aligned} \vec{E}'_\parallel &= \vec{E}_\parallel,\ \ \vec{B}'_\parallel = \vec{B}_\parallel, \\ \vec{E}'_\perp &= \frac{\vec{E}_\perp + \left(\vec{u}\times\vec{B}_\perp\right)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}},\ \vec{B}'_\perp = \frac{\vec{B}_\perp - \left(\vec{u}\times\vec{E}_\perp\right)/c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}. \end{aligned}$$

имаме $u^2/c^2 \to 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \vec{E}'_\parallel &= \vec{E}_\parallel,\ \ \vec{B}'_\parallel = \vec{B}_\parallel, \\ \vec{E}'_\perp &\approx \vec{E}_\perp + \left(\vec{u}\times\vec{B}_\perp\right),\ \vec{B}'_\perp \approx \vec{B}_\perp - \left(\vec{u}\times\vec{E}_\perp\right)/c^2. \end{aligned}$$

1.5

Минавайки в система в която пластинката е в покой то имаме перпендикулярна компонента на електричното поле в тази отправна система:

$$\vec{E}'_\perp \approx \underbrace{\vec{E}_\perp}_{=0} + \left(\vec{u}\times\vec{B}\right) = \vec{u}\times\vec{B} = uB$$

заряда ще спре да се трупа върху стените на пластинката, когато полето което създава пластинката компенсира външното поле $\Rightarrow E'_\perp = \sigma/\varepsilon_0 \Rightarrow \sigma = \varepsilon_0 uB$. Обърнете внимание, че задачата може да се реши и без да преминавате в движещата се координатна. Разгледайте кога магнитната част на Лоренцовата сила действаща върху зарядите със заряд q движищи се със скорост u ($F = q\vec{u}\times\vec{B}$) се компенсират от електричната сила действаща на зарядите от страна на натрупаните заряди върху повърхността на пластината (σ). $F = q\sigma/\varepsilon_0 = quB \Rightarrow \sigma = \varepsilon_0 uB$.

1.6

В отправна система в която частицата е в покой имаме само електрично поле, което поле се дава като:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\vec{r}$$

а в отправна система в която частицата се движи със скорост u имаме напречно магнитно поле, което се дава от:

$$\vec{B}'_\perp \approx \underbrace{\vec{B}_\perp}_{=0} - \left(\vec{u}\times\vec{E}\right)/c^2 \approx -\varepsilon_0\mu_0\left(\vec{u}\times\vec{E}\right) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q}{r^3}\left(\vec{r}\times\vec{u}\right)$$

тази формула преди я използвахме като я постулирахме, а сега я получихме от трансформациите на Лоренц за полето.

1.7

Нека първо да разгледаме задачата в отправна система в която заряда е неподвижен и нека за улеснение заряда да се намира в центъра на координатната система. Тогава в собствената отправна система заряда ще създава само електрично поле:

$$\vec{E}' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(r')^3}\vec{r'}$$

което можем да разложим на две компоненти: по посока на движението (координатата x) и по перпендикулярна посока на движението (координатата y) тогава имаме

$$\begin{aligned} E'_x &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(r')^3}x', \\ E'_y &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(r')^3}y'. \end{aligned}$$

преминавайки в лабораторната система имаме:

$$x = r\cos\theta = x'\sqrt{1-u^2/c^2}, \quad y = r\sin\theta = y',$$

където сме отчели лоренцовото скъсяване по посока на движението. Сега ползваме преобразованието за електричното поле

$$E_x = E'_x, \quad E_y = \frac{E'_y}{\sqrt{1-u^2/c^2}}.$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(r')^3}\frac{x}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \\ E_y &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(r')^3}\frac{y}{\sqrt{1-u^2/c^2}}. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ големината на електричното поле ще е:

$$E = \sqrt{E_x^2+E_y^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(r')^3}\sqrt{\frac{x^2+y^2}{1-u^2/c^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(r')^3}\frac{r}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

отчитайки, че

$$(r')^3 = \left((x')^2+(y')^2\right)^{3/2} = \left(\frac{x^2}{1-u^2/c^2}+y^2\right)^{3/2} = r^3\left(\frac{1-\sin^2(\theta)\,u^2/c^2}{1-u^2/c^2}\right)^{3/2}$$

окончателно имаме:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\frac{1-u^2/c^2}{\left(1-\sin^2(\theta)\,u^2/c^2\right)^{3/2}}$$

ако ползваме резултата от първата задача то имаме

$$\vec{B} = -\left(\vec{u}\times\vec{E}\right)/c^2$$

$\Rightarrow$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\left|\vec{u}\times\vec{r}\right|}{r^3}\frac{1-u^2/c^2}{\left(1-\sin^2(\theta)\,u^2/c^2\right)^{3/2}}$$