Електродинамика

Андон Рангелов, кабинет В 39, email: rangelov@phys.uni-sofia.bg, интернет страница на курса http://ed.quantum-bg.org/

В специалната теория на относителността, Айнщайн изказва няколко постулата:

1)Принципът на относителността: Законите на физиката са еднакви във всички инерциални отправни системи.

2)Универсалност на скоростта на светлината: Скоростта на светлината е една и съща във всички инерциални отправни системи.

3) Гранична скорост на движение: Информацията не може да се предава със скорост по-голяма от скоростта на светлината във вакуум.

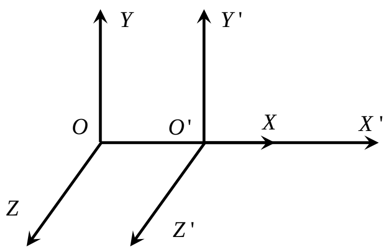
Преобразованията на Лоренц дават връзката между координатите и времето (x, y, z, t) в една инерциална система S, спрямо координатите и времето (x', y', z', t') в друга инерциална отправна система S', която се движи със скорост u насочена по оста x на системата S (виж фиг. 1).

$$
\begin{aligned}
x' &= \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \\
t' &= \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}.
\end{aligned}
$$

Вече координатите и времето не са независими а се разглеждат в една съвкупно четири мерно пространство-време, така нареченото пространство на Минковски. Това което отговаря на дължина в това четеримерно пространство се нарича интервал между две събития и се дава като:

$$s_{12}^2 = (ct_1 - ct_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2 .$$

интервала между две събития е инвариант (еднакъв за всички инерциални отправни системи).



Фигура 1:

Задачи:

1.1

Използвайки преобразованията на Лоренц покажете че: две събития, които са едновременни в една инерциална координатна система могат да не са едновременни в друга инерциална координатна система. Кога две събития са едновременни във всяка инерциална координатна система?

1.2

Използвайки преобразованията на Лоренц покажете, че:

а) в собствена инерциална отправна система (система в която тялото е в покой) времето тече най-бавно.

б) в собствена инерциална отправна система дължината на движещото се тяло е най-голяма.

1.3

Използвайки Лоренцовите трансформации получете релативисткият закон за събиране на скорости. Упътване: Разгледайте тяло, което се движи със скорост v спрямо неподвижната координатна система S и намерете каква е скоростта на тялото в отправна система S' движеща се с постоянна скорост u, насочена по оста x спрямо неподвижната отправна система S.

1.4

Ползвайки резултата от предишната задача покажете, че:

а) в граничният случай когато $c \to \infty$, то релативиският закон събиране на скорости преминава в закона на Галилей за събиране на скорости (класическият закон за събиране на скорости).

б) ако $|v| \leq c$ то покажете, че за всяка отправна система имате $|v'| \leq c$, тоест за всяка отправна система скоростта на частицата не надминава скоростта на светлината.

1.5

Ползвайки резултата от задача 1.3 намерете, за малки скорости ($u, v << c$), първата поправка към закона на Галилей за събиране на скорости. А какво става със самите трансформации на Лоренц при същите условия?

Упътване: ползвайте приближената формула $(1-\alpha)^n \approx 1 - n\alpha$, когато $\alpha << 1$.

1.6

Нека две частици се движат със скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ в неподвижната отправна система S (лабораторната система). Покажете, че големината на тяхната относителна скорост се дава по формулата:

$$V_{otn}^2 = \frac{(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 - (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)^2 / c^2}{(1 - \vec{v}_1.\vec{v}_2/c^2)^2}.$$

Упътване: В релативиската механика относителната скорост между две частици се определя като скоростта на едната частица в отправна система в която другата частица е в покой. Тоест разгледайте лабораторната отправна система и система в която ендата частица е в покой. Ползвайте равенството $\left(\vec{a}.\vec{b}\right)^2 = (\vec{a})^2 \left(\vec{b}\right)^2 - \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)^2$

1.7

Едно следствие от удължаването на времето е парадокса на близнаците: Ако имаме двама братя близнаци, от които единият е космонавт и тръгва на пътешествие в космоса със скорост близка до скоростта на светлината след известно време се връща на земята и вижда своя брат близнак е остарял по-вече от него. Но от гледна точка на брата, който е стоял на земята трябва не той да е остарял а брат му, понеже имаме равноправие на отправните системи. Обяснете парадокса.

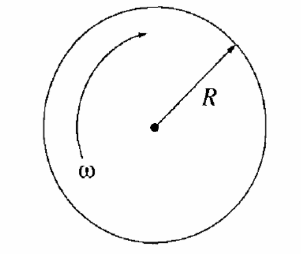
1.8

Ако имаме гараж в който искаме да паркираме кола, но тя е по-дълга от гаража, какво можем да направим? Можем ли да засилим колата достатъчно бързо и тогава от отправна система на гаража колата ще се скъси и ще можем да приберем цялата в гаража? А ако разгледаме задачата в отправна система в която колата се движи, няма ли гаража да изглежда скъсен? Обяснете парадокса.

1.9

Парадокс на Еренфест (Ehrenfest):

Диск с радиус R започва да се върти около оста си с ъглова скорост ω, като е показано на фиг. 2. Обиколката на диска би трябвало да изпитва Лоренцово скъсяване, понеже скоростта е винаги в посока на обиколката на диска, но радиуса е пък винаги перпендикулярен на тази скорост и следователно няма да се изменя. Тогава отношението на обиколката към радиуса трябва да се изменя, тоест π трябва да не е константа а да зависи от отправната система. Обяснете парадокса.



Фигура 2:

Решения:

1.1

Нека в собствена инерциална система S координатите и времето на първото събитие да са $(x_1 = 0, y_1 = 0, z_1 = 0, t_1 = 0)$ а на второто събитие да са $(x_2, y_2, z_2, t = 0)$ от Лоренцовите трансформации следва, че в инерциална отправна система S' координатите и времето в което се случва първото събитие са:

$$
\begin{aligned}
x_1' &= \frac{x_1 - ut_1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = 0, \quad y_1' = y_1 = 0, \quad z_1' = z_1 = 0, \\
t_1' &= \frac{t_1 - \frac{u}{c^2}x_1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = 0.
\end{aligned}
$$

а за второто събитие имаме:

$$
\begin{aligned}
x_2' &= \frac{x_2 - ut_2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{x_2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad y_2' = y_2, \quad z_2' = z_2, \\
t_2' &= \frac{t_2 - \frac{u}{c^2}x_2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{-\frac{u}{c^2}x_2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}.
\end{aligned}
$$

Тоест второто събитие в отправна система S' може да се случи преди първото или след първото в зависимост от знака на координатата x_2. Очевидно двете събития едновременни в една координатна система ще са едновременни и във всяка друга инерциална координатна система ако се случват в едни и същи координати x.

1.2

В собствена инерциална система S' координатите и времето са (x', y', z', t') а от Лоренцовите трансформации следва, че:

$$
\Delta t = \frac{\Delta t' + \frac{u}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}
$$

нека началото на координатната система да е свързано с движещото се тяло $\Rightarrow \Delta x' = 0 \Rightarrow$

$$
\Delta t' = \Delta t\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}.
$$

Тоест времето което мерим в лабораторната система Δt е по-голямо спрямо времето което мерим в собствената отправна система $(\Delta t')$. Ако мерим дължините $\Delta x', \Delta y', \Delta z'$ в собствена инерциална система те са свързани с дължините $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ в лабораторната отправна система по следният начин:

$$
\Delta x = \frac{\Delta x' + u\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad \Delta y = \Delta y', \quad \Delta z = \Delta z',
$$

и понеже мерим дължината в един и същ момент от време $\Delta t' = 0 \Rightarrow$

$$
\Delta x' = \Delta x\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}, \quad \Delta y = \Delta y', \quad \Delta z = \Delta z'.
$$

Тоест имаме скъсяване на дължината само по посока на движението, но не и по другите две направления.

1.3

От Лоренцовите трансформации имаме:

$$
\Delta x' = \frac{\Delta x - u\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad \Delta y' = \Delta y, \quad \Delta z' = \Delta z, \quad \Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}
$$

понеже $v_x' = \Delta x'/\Delta t' \Rightarrow$

$$
v_x' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\frac{\Delta x - u\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}}{\frac{\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}} = \frac{\Delta x - u\Delta t}{\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x} = \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t} - u}{1 - \frac{u}{c^2}\frac{\Delta x}{\Delta t}},
$$

но $\frac{\Delta x}{\Delta t} = v_x \Rightarrow$

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - (uv_x)/c^2},$$

аналогично имаме $v'_y = \Delta y'/\Delta t' \Rightarrow$

$$v'_y = \frac{\Delta y'}{\Delta t'} = \frac{\Delta y}{\frac{\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}} = \frac{v_y\sqrt{1-u^2/c^2}}{1-(uv_x)/c^2},$$

както и $v'_z = \Delta z'/\Delta t' \Rightarrow$

$$v'_z = \frac{\Delta z'}{\Delta t'} = \frac{\Delta z}{\frac{\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}} = \frac{v_z\sqrt{1-u^2/c^2}}{1-(uv_x)/c^2}.$$

Получените равенства изразяват релативисткият закон за събиране на скорости. Обратната трансформация (скоростта v изразена чрез v') може да се получи като формално сменим u с $-u$, v'_x с v_x, v'_y с v_y и v'_z с v_z.

1.4

Ползвайки резултатите от предишната задача заедно с граничното условие $c \to \infty$ (toest $v, u << c$) то можем да пренебрегнем малките членове $(uv_x)/c^2$ и $u^2/c^2 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} v'_x &= \frac{v_x - u}{1-(uv_x)/c^2} \approx v_x - u, \\ v'_y &= \frac{v_y\sqrt{1-u^2/c^2}}{1-(uv_x)/c^2} \approx v_y, \\ v'_z &= \frac{v_z\sqrt{1-u^2/c^2}}{1-(uv_x)/c^2} \approx v_z. \end{aligned}$$

1.5

От предишната формула $(1-\alpha)^n \approx 1 - n\alpha$, когато $\alpha << 1$ имаме

$$\begin{aligned} \left(1-(uv_x)/c^2\right)^{-1} &\approx 1 + \frac{uv_x}{c^2}, \\ \sqrt{1-u^2/c^2} &\approx 1 - \frac{u^2}{2c^2}. \end{aligned}$$

следователно ако комбинираме със закона за събиране на скорости имаме:

$$\begin{aligned} v'_x &= \frac{v_x - u}{1-(uv_x)/c^2} \approx v_x - u + \frac{u^2 v_x}{c^2}, \\ v'_y &= \frac{v_y\sqrt{1-u^2/c^2}}{1-(uv_x)/c^2} \approx v_y\left(1-\frac{u^2}{2c^2}\right)\left(1+\frac{uv_x}{c^2}\right) \approx v_y\left(1-\frac{u^2}{2c^2}+\frac{uv_x}{c^2}\right), \\ v'_z &= \frac{v_z\sqrt{1-u^2/c^2}}{1-(uv_x)/c^2} \approx v_z\left(1-\frac{u^2}{2c^2}\right)\left(1+\frac{uv_x}{c^2}\right) \approx v_z\left(1-\frac{u^2}{2c^2}+\frac{uv_x}{c^2}\right). \end{aligned}$$

1.6

Избираме оста x на лабораторната отправна система (S) да е насочена по скоростта $\vec{v}_2$ на втората частица. Тогава за системата S' имаме $u = v_2$. Скоростта $\vec{v}_1$ можем да разложим на две компоненти $\vec{v}_1^{\parallel}$ -успоредна на оста x и $\vec{v}_1^{\perp}$-перпендикулярна на оста x.

$$\begin{aligned} v_1^{\parallel} &= |\vec{v}_1|\cos\alpha = \frac{|\vec{v}_1|\,|\vec{v}_2|\cos\alpha}{|\vec{v}_2|} = \frac{\vec{v}_1.\vec{v}_2}{|\vec{v}_2|}, \\ v_1^{\perp} &= |\vec{v}_1|\sin\alpha = \frac{|\vec{v}_1|\,|\vec{v}_2|\sin\alpha}{|\vec{v}_2|} = \frac{|\vec{v}_1\times\vec{v}_2|}{|\vec{v}_2|}. \end{aligned}$$

По определение $v_1^{\|} = v_{1x}$ а напречната компонента $v_1^{\perp}$ се трансформира като v_{1y} или като v_{1z} $\Rightarrow$ от релативисткият закон за събиране на скорости получаваме:

$$\begin{aligned}
\left(v_1^{\|}\right)' &= \frac{v_1^{\|} - v_2}{1 - \left(v_1^{\|} v_2\right)/c^2} = \frac{\frac{\vec{v}_1.\vec{v}_2}{|\vec{v}_2|} - v_2}{1 - \left(\frac{\vec{v}_1.\vec{v}_2}{|\vec{v}_2|} v_2\right)/c^2}, \\
\left(v_1^{\perp}\right)' &= \frac{v_1^{\perp}\sqrt{1 - v_2^2/c^2}}{1 - \left(v_1^{\|} v_2\right)/c^2} = \frac{\frac{|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2|}{|\vec{v}_2|}\sqrt{1 - v_2^2/c^2}}{1 - \left(\frac{\vec{v}_1.\vec{v}_2}{|\vec{v}_2|} v_2\right)/c^2} = \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{\vec{v}_2^2}{c^2}\right)\frac{(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)^2}{\vec{v}_2^2}}}{\left(1 - \frac{\vec{v}_1.\vec{v}_2}{c^2}\right)}.
\end{aligned}$$

По определение относителната скорост е

$$\begin{aligned}
V_{otn}^2 &= \left(v_1'\right)^2 = \left(v_1^{\|\prime}\right)^2 + \left(v_1^{\perp\prime}\right)^2 = \\
&= \frac{\left[\vec{v}_1.\vec{v}_2 - \vec{v}_2^2\right]^2/\vec{v}_2^2 + \frac{(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)^2}{\vec{v}_2^2} - \frac{(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{\vec{v}_1.\vec{v}_2}{c^2}\right)^2} = \\
&= \frac{\left((\vec{v}_1.\vec{v}_2)^2 - 2\vec{v}_2^2(\vec{v}_1.\vec{v}_2) + \vec{v}_2^4\right)/\vec{v}_2^2 + \frac{(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)^2}{\vec{v}_2^2} - \frac{(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{\vec{v}_1.\vec{v}_2}{c^2}\right)^2} = \\
&= \frac{\frac{(\vec{v}_1.\vec{v}_2)^2 - 2\vec{v}_2^2(\vec{v}_1.\vec{v}_2) + \vec{v}_2^4}{\vec{v}_2^2} + \frac{\vec{v}_1^2\vec{v}_2^2 - (\vec{v}_1.\vec{v}_2)^2}{\vec{v}_2^2} - \frac{(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{\vec{v}_1.\vec{v}_2}{c^2}\right)^2} = \\
&= \frac{-2(\vec{v}_1.\vec{v}_2) + \vec{v}_2^2 + \vec{v}_1^2 - \frac{(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{\vec{v}_1.\vec{v}_2}{c^2}\right)^2} = \\
&= \frac{(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 - \frac{(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{\vec{v}_1.\vec{v}_2}{c^2}\right)^2}
\end{aligned}$$

Членът $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)^2$ развиваме като

$$\begin{aligned}
(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)^2 &= (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2).(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) = ((\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \times \vec{v}_1).\vec{v}_2 = (\vec{v}_2(\vec{v}_1.\vec{v}_1) - \vec{v}_1(\vec{v}_2.\vec{v}_1)).\vec{v}_2 = \\
&= (\vec{v}_2.\vec{v}_2)(\vec{v}_1.\vec{v}_1) - (\vec{v}_1.\vec{v}_2)(\vec{v}_2.\vec{v}_1) = \vec{v}_1^2\vec{v}_2^2 - (\vec{v}_1.\vec{v}_2)^2
\end{aligned}$$

1.7

Парадокс няма понеже двете отправни системи не са равнопоставени. Този близнак, който се движи със космическият кораб, трябва да се е ускорил и следователно не е бил инерциална система. За да се върне обратно на земята той трябва да забави хода си и да обърне, следователно отново имаме не инерциална система. Пълното обяснение на парадокса на близнаците може да се обясни не със СТО а с ОТО.

1.8

Двамата наблюдатели са прави. За да обясните това твърдение може да ползвате полученият резултат от задача 1.1, за това че две събития едновременни в една система могат да не са едновременни в друга система.

1.9

За подробно обяснение на парадокса виж примерно `http://en.wikipedia.org/wiki/Ehrenfest_paradox` Или виж сборника на Griffiths `http://ed.quantum-bg.org/books.html` задача 12.11