Електродинамика

Андон Рангелов, кабинет В 39, email: rangelov@phys.uni-sofia.bg , интернет страница на курса `http://ed.quantum-bg.org/`

Уравненията на Максуел в диференциална форма са :

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla}.\vec{D} &= \rho, \quad (Gauss's\ law)\\
\vec{\nabla}.\vec{B} &= 0, \quad (Gauss's\ law\ for\ magnetism)\\
\vec{\nabla}\times\vec{E} &= -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \quad (Faraday's\ law)\\
\vec{\nabla}\times\vec{H} &= j+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \quad (Ampere's\ law)
\end{aligned}
$$

където $\vec{E}$ е интензитета на електричното поле, $\vec{B}$ е интензитета на магнитното поле, $\vec{D}$ е електричната индукция ($\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$, $\vec{P}$ е вектора на поляризация, за линейни среди имаме $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$), $\vec{H}$ е магнитната индукция ($\vec{H}=\vec{B}/\mu_0-\vec{M}$, $\vec{M}$ е вектора на магнитизация, за линейни среди имаме $\vec{H}=\vec{B}/\mu$), ρ е плътност на свободните електрични заряди, j е плътност на електричният ток от свободните заряди.

Задачи:

1.1

Плоско-монохроматична вълна с честота ω се разпространява в посока z. Електричното и магнитното поле на вълната се дават като:

$$
\begin{aligned}
\vec{E}_I(z,t) &= [E_{0I},0,0]\exp(ik_1z-i\omega t),\\
\vec{B}_I(z,t) &= \left[0,\frac{E_{0I}}{v_1},0\right]\exp(ik_1z-i\omega t),
\end{aligned}
$$

тоест вълната е поляризирана, като електричното поле е в направление x а магнитното поле в направление y. Вълната пада перпендикулярно на границата между две среди, както е показано на фиг. 1. От ляво средата има електрична и магнитна възприемчивост ε_1 и μ_1 а от дясно средата има електрична и магнитна възприемчивост ε_2 и μ_2. Скоростта на разпространение на вълната от ляво е v_1 а от дясно е v_2. Намерете електричният интензитет (и магнитният) на преминалата и отразената вълна.

Упътване: преминалата вълна, ще има електрично и магнитно поле от вида:

$$
\begin{aligned}
\vec{E}_T(z,t) &= [E_{0T},0,0]\exp(ik_2z-i\omega t),\\
\vec{B}_T(z,t) &= \left[0,\frac{E_{0T}}{v_2},0\right]\exp(ik_2z-i\omega t),
\end{aligned}
$$

а отразената вълна ще е от вида:

$$
\begin{aligned}
\vec{E}_R(z,t) &= [E_{0R},0,0]\exp(-ik_1z-i\omega t),\\
\vec{B}_R(z,t) &= \left[0,-\frac{E_{0R}}{v_1},0\right]\exp(-ik_1z-i\omega t).
\end{aligned}
$$

1.2

Особено модерно в последното десетилетие е създаването на така наречените метаматериали. Това са изкуствени материали, проектирани да имат свойства, които не са достъпни в природата. Един типичен пример за метаматериал, е материал с едновременно отрицателна диелектрична и магнитна проницаемост. Като следствие, такъв материал има и отрицателен показател на пречупване.

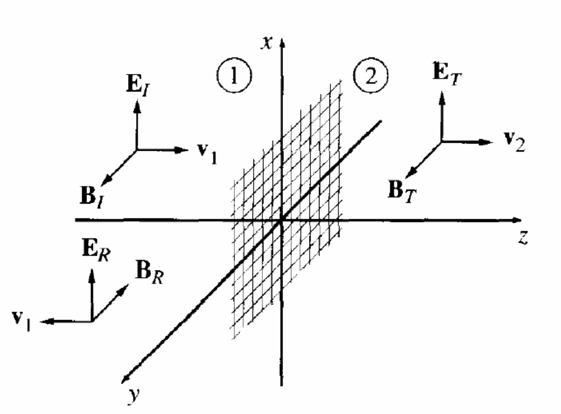
За материали с отрицателен показател на пречупване е известно, че векторът на Пойнтинг (векторът, който показва посоката на енергийния поток - посоката на разпространение на светлината) и вълновият вектор (векторът, който показва посоката на импулса) имат противоположни посоки, докато за материали с положителен показател на пречупване, векторът на Пойнтинг и вълновият вектор имат еднакви посоки.

Намерете за предишната задача интензитета на електричното поле на преминалата вълна, както и на отразената ако средата от ляво има електрична и магнитна проницаемост съответно ε_0 и μ_0 (това е вакуум) а от дясно имаме електрична и магнитна проницаемост съответно $-\varepsilon_0$ и $-\mu_0$ (това е така нареченият антивакуум).

1.3

Ако имате повърхностни токове с плътност j то решете задача 1.1

1.4



Фигура 1:

Намерете честотата на свободните колебания на плазма, която е съставена от електрони и положителни йони, със заряд равен на заряда на електрона, и брой в единица обем $N = N_i = N_e$.

Упътване: използвайте модела на плазма, в която заредените частици не се удрят, а се движат в сумарно електрично поле, което сами създават. Разгледайте отместването на електроните спрямо йоните и използвайте резултата за електричното поле на плосък кондензатор. Движението на йоните, може да пренебрегнете понеже масата на йоните е много по-малка от масата на електроните.

1.5

Сфера с радиус R се подържа при потенциал $V(\theta, R) = V_0 \sin^2(\theta/2)$ намерете потенциала вътре в сферата $(r < R)$.

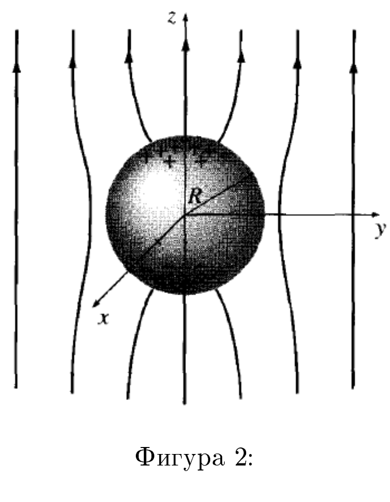
1.6

За предишната задача намерете потенциала извън сферата $(r > R)$.

1.7

Незаредена метална сфера с радиус R е поставена в иначе еднородното електрично поле с големина $\vec{E} = E_0 \vec{z}$ (фиг 2). Намерете потенциала извън сферата както и индуцираният по повърхността заряд върху сферата.

Упътване: Електричното поле, ще отмести положителните заряди към северният полюс а отрицателните заряди към южният полюс (фиг 2). Така индуцираните електрични заряди ще променят електричното поле в близост до сферата. За да решите задачата ползвайте и резултата от предишните задачи.



Фигура 2:

1.1

За да намерим електричното поле на преминалата вълна и на отразената, ще ползваме граничните условия приложени на равнината между двете среди:

$$
\begin{aligned}
E_1^{\parallel} &= E_1^{\parallel}, \quad \varepsilon_1 E_1^{\perp} = \varepsilon_2 E_2^{\perp}, \\
B_1^{\perp} &= B_2^{\perp}, \quad \frac{B_1^{\parallel}}{\mu_1} = \frac{B_2^{\parallel}}{\mu_2}.
\end{aligned}
$$

понеже нямаме компоненти на електричното и магнитното поле по оста z то тривиално се изпълняват $B_1^{\perp} = B_2^{\perp} = 0$ и $\varepsilon_1 E_1^{\perp} = \varepsilon_2 E_2^{\perp} = 0$ от другите две гранични условия имаме:

$$
\begin{aligned}
E_{0I} + E_{0R} &= E_{0T} \\
\frac{1}{\mu_1}\left(\frac{E_{0I}}{v_1} - \frac{E_{0R}}{v_1}\right) &= \frac{1}{\mu_2}\frac{E_{0T}}{v_2} \Leftrightarrow E_{0I} - E_{0R} = \underbrace{\frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2}}_{=\beta} E_{0T}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
E_{0R} &= \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right) E_{0I}, \\
E_{0T} &= \left(\frac{2}{1+\beta}\right) E_{0I}
\end{aligned}
$$

1.2

Решава се както предишната задача разликата е, че сега коефициента β се дава като:

$$
\beta = \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2} = \frac{\mu_0 v_0}{(-\mu_0)(-v_0)} = 1
$$

$\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
E_{0R} &= \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right) E_{0I} = 0, \\
E_{0T} &= \left(\frac{2}{1+\beta}\right) E_{0I} = E_{0I}
\end{aligned}
$$

1.3

Аналогично на задача 1.1 имаме граничните условия:

$$
\begin{aligned}
E_1^{\parallel} &= E_1^{\parallel}, \quad \varepsilon_1 E_1^{\perp} = \varepsilon_2 E_2^{\perp}, \\
B_1^{\perp} &= B_2^{\perp}, \quad \frac{B_1^{\parallel}}{\mu_1} - \frac{B_2^{\parallel}}{\mu_2} = j.
\end{aligned}
$$

понеже нямаме компоненти на електричното и магнитното поле по оста z то тривиално се изпълняват $B_1^{\perp} = B_2^{\perp} = 0$ и $\varepsilon_1 E_1^{\perp} = \varepsilon_2 E_2^{\perp} = 0$ от другите две гранични условия имаме:

$$
\begin{aligned}
E_{0I} + E_{0R} &= E_{0T} \\
\frac{E_{0I}}{\mu_1 v_1} - \frac{E_{0R}}{\mu_1 v_1} - \frac{E_{0T}}{\mu_2 v_2} &= j \Leftrightarrow E_{0R} = \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right) E_{0I} - j\frac{\mu_1 v_1}{1+\beta}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
E_{0R} &= \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right) E_{0I} - j\frac{\mu_1 v_1}{1+\beta}, \\
E_{0T} &= \left(\frac{2}{1+\beta}\right) E_{0I} - j\frac{\mu_1 v_1}{1+\beta}
\end{aligned}
$$

1.4

Разглеждаме един безкрайно дълъг и плосък слой от плазмата, в която заредените частици не се удрят, а се движат в сумарно електрично поле, което сами създават. При отместване на електроните перпендикулярно на слоя на разстояние x, възниква електрично поле E, идентично на полето на плосък кондензатор (виж фиг. 3). Това поле E е пропорционално на ефективната повърхнина плътност на зарядите $\sigma = q/s = NVe/S = xeN$, която възниква в областите на некомпенсираните заряди на повърхността на слоя ($E = \sigma/\varepsilon_0$). Полето E създава сила F която действа върху всеки електрон:

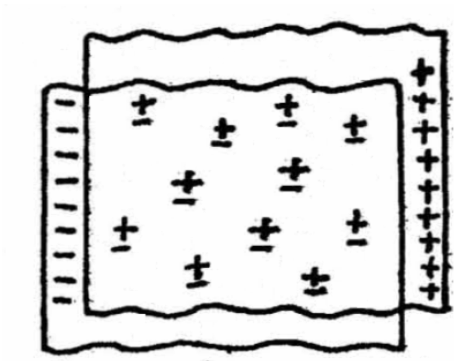
$$F = eE = \frac{e^2 N}{\varepsilon_0} x.$$

Тази сила е насочена срещу отместването, тоест стреми се да върни електроните от повърхностният слой обратно в плазмата. Тогава закона на Нютон записан за електроните под действието на тази сила е:

$$ma = m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{e^2 N}{\varepsilon_0} x$$

което е уравнение на осцилатор с честота ω:

$$\omega = \sqrt{\frac{e^2 N}{m\varepsilon_0}}$$



Фигура 3:

1.5

В сферични координати уравнението на Лаплас е

$$\Delta V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$$

от симетрията на задачата следва, че $\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$ и след прилагане на метода на разделяне на променливите ($V(r,\theta) = R(r)\,\Theta(\theta)$) $\Rightarrow$

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r}\right) + \frac{1}{\Theta \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta}\right) = 0$$

първият член зависи само от r а вторият зависи само от $\theta \Rightarrow$ всеки един е константа

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r}\right) = l\,(l+1)\,, \qquad \frac{1}{\Theta \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta}\right) = -l\,(l+1)$$

радиалното уравнение има решение $R(r) = Ar^l + B(r)^{-l-1}$ докато ъгловото уравнение има решения полиномите на Льожандър $\Theta(\theta) = P_l(\cos\theta)$, където $P_l(x) = \frac{1}{2^l}\frac{1}{l!}\left(\frac{d}{dx^l}(x^2-1)^l\right)$ `http://mathworld.wolfram.com/LegendrePolynomial.html` $\Rightarrow$ общото решение е:

$$V(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}\right) P_l(\cos\theta)$$

понеже търсим потенциала вътре в сферата, а при $r \to 0$ бихме имали сингулярности то трябва $B_l = 0$ а при $r = R \Rightarrow V(R,\theta) = V_0 \sin^2(\theta/2) \Rightarrow$

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l P_l(\cos\theta) = V_0 \sin^2(\theta/2) = \frac{V_0}{2}(1-\cos\theta) = \frac{V_0}{2}(P_0(\cos\theta) - P_1(\cos\theta))$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{V_0}{2} \\ A_1 &= -\frac{V_0}{2R} \end{aligned}$$

и всички останали $A_l = 0 \Rightarrow$

$$V(r,\theta) = \frac{V_0}{2}\left(1 - \frac{r}{R}\cos\theta\right)$$

1.6

Решава се като предишната задача, до момента в който сме намерили общият вид на потенциала, без да сме наложели граничните условия, тоест имаме следният потенциал

$$V(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}\right) P_l(\cos\theta)$$

очевидно при $r \to \infty$, $V \to 0 \Rightarrow A_l = 0 \Rightarrow$

$$V(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta)$$

налагайки граничното условие върху сферата имаме:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{R^{l+1}} P_l(\cos\theta) = V_0 \sin^2(\theta/2) = \frac{V_0}{2}(1-\cos\theta) = \frac{V_0}{2}(P_0(\cos\theta) - P_1(\cos\theta))$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} B_0 &= \frac{V_0 R}{2} \\ B_1 &= -\frac{V_0 R^2}{2} \end{aligned}$$

а всички останали $B_l = 0 \Rightarrow$

$$V(r,\theta) = \frac{V_0 R}{2r}\left(1 - \frac{R}{r}\cos\theta\right)$$

1.7

Понеже сферата е метална, то повърхността и е еквипотенциална. На далеч от сферата трябва да имаме хомогенното поле, което имаме при отсъствие на сферата $\vec{E} = E_0 \vec{z} \Rightarrow V \to -E_0 z + const$ понеже на екваториалната равнина потенциала е нула то и $const = 0$ и ние имаме следните гранични условия:

$$\begin{aligned} V &= 0, \quad r = R \\ V &\to -E_0 r\cos\theta \quad r >> R \end{aligned}$$

Ползвайки потенциала на сферата от предишните задачи имаме:

$$V(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}\right) P_l(\cos\theta)$$

от горните гранични условия $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} A_l R^l + \frac{B_l}{R^{l+1}} &= 0 \Leftrightarrow B_l = -A_l R^{2l+1} \\ \sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l + \frac{-A_l R^{2l+1}}{r^{l+1}}\right) P_l(\cos\theta) &\approx \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta) = -E_0 r\cos\theta \end{aligned}$$

$\Rightarrow A_1 = -E_0$ а всички останали $A_l = 0$ или окончателно имаме:

$$V\left(r,\theta\right) = -E_0\left(r - \frac{R^3}{r^2}\right)\cos\theta$$

ако искаме да знаем индуцираният заряд върху сферата то може лесно да го намерим от граничните условия между вакуума и метала (в метала нямаме поле) $\Rightarrow$

$$\sigma\left(\theta\right) = -\varepsilon_0\frac{\partial V}{\partial r}|_{r=R} = \varepsilon_0 E_0\left(1 + 2\frac{R^3}{r^3}\right)\cos\theta|_{r=R} = 3\varepsilon_0 E_0\cos\theta$$