Електродинамика

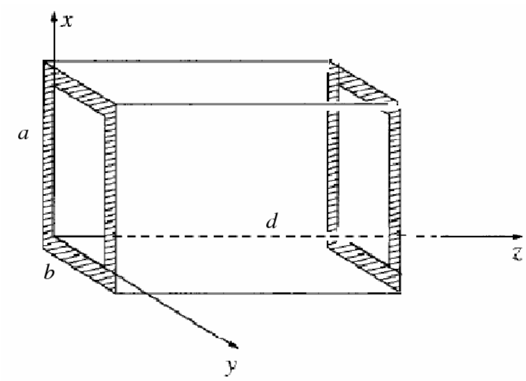
Андон Рангелов, кабинет В 39, email: rangelov@phys.uni-sofia.bg , интернет страница на курса `http://ed.quantum-bg.org/`

Задачи:

1.1

Резонаторна кутия, която е показана на фиг. 1, е куха от вътре, има размери a, b, d и е направена от перфектни проводници. Покажете, че могат да се разпространяват вълни в кутията с точно определени честоти от вида:

$$\omega = c\pi\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2 + (l/d)^2}, \quad n, m, l = 0, 1, 2, ...$$



Фигура 1:

Упътване: Търсете решенията на електричното и магнитното поле в следният вид:

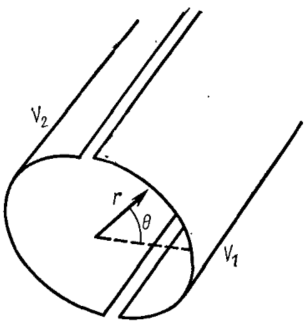
$$\vec{E}(z,t) = \vec{E}_0(x,y,z)\exp(-i\omega t), \quad \vec{B}(z,t) = \vec{B}_0(x,y,z)\exp(-i\omega t).$$

Които трябва да удовлетворяват уравненията на Максуел във вакуум заедно с граничните условия върху стените на кутията.

1.2

Проводник имащ формата на безкраен и кух цилиндър с радиус a (фиг 2) е разрязан по оста си на две равни части, които са разделени на не голямо разстояние една от друга. Ако едната половина от цилиндъра се подържа при потенциал V_1 а другата при потенциал V_2 то покажете, че потенциала в точката с координати r, θ в пространството между пластините има потенциал:

$$V = \frac{V_1 + V_2}{2} + 2\frac{V_1 - V_2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\left(\frac{r}{a}\right)^{2n-1}\cos\left[(2n-1)\theta\right]$$



Фигура 2:

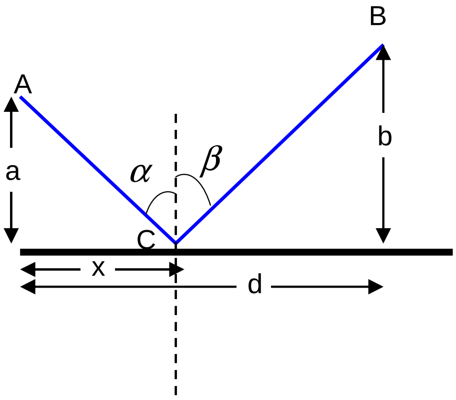
Принципа на минималното действие, който сте използвали в механиката за да изведете уравненията на Хамилтон е универсален принцип. Сега ще го използваме за да изведем законите в геометричната оптика (закона за отражение и за пречупване на лъчите). В оптиката принципа на минималното действие е известен като принципа на Ферма (Fermat's principle).

Принципа на Ферма гласи:

Светлината изминава разстоянието между две точки А и Б за най-кратко време.

1.3

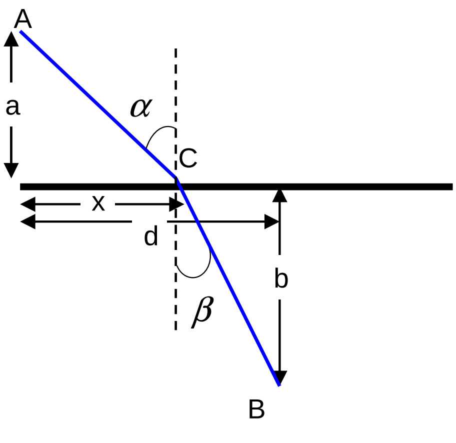
Използвайки принципа на Ферма изведете закона за отражение на светлината (ъгъла на падане е равен на ъгъла на отражение). За целта разгледайте източник на светлина (точка А) и наблюдател (точка В) разположени над огледало както е показано на Фиг 3.



Фигура 3:

1.4

Използвайки принципа на Ферма изведете закона на Снелиус. За целта разгледайте източник на светлина (точка А) разположен в среда с показател на пречупване n_1 и наблюдател (точка В) разположен в среда с показател на пречупване n_2 както е показано на Фиг 4.



Фигура 4:

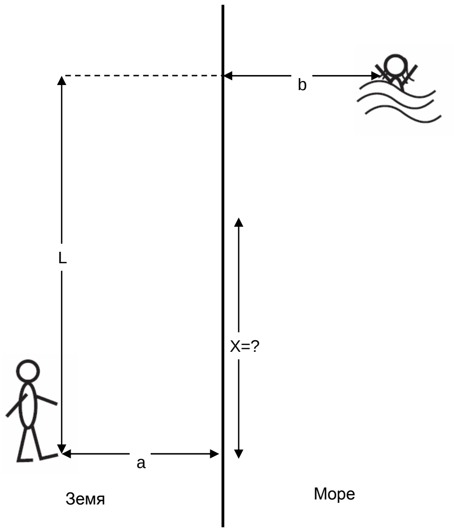
1.5

Спасител стои на брега когато забелязва давещ се във водата както е показано на Фиг 5. Спасителят бяга със скорост v_1 а може да плува със скорост v_2. Намерете в коя точка от брега той трябва да влезне във водата ($x =?$) за да може най-бързо да стигне до давещият се.

Забележка :

Използвайте принципа на Ферма за да решите задачата.

1.6



Фигура 5:

Дадени са две точки A и B, разположени на различна височина, които са свързани с жица. Докажете, че кривата, по която пръстенчето ще се спусне под действие на силата на тежестта от точка A до точка B за най-кратко време, е дъга от циклоида.

Забележка:

Една крива $y(x)$ е циколида тогава и само тогава, когато удовлетворява уравнението:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2y\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + 1 = 0$$

Решения:

1.1

Търсим решение на електричното и магнитното поле от вида:

$$\vec{E}(z,t) = \vec{E}_0(x,y,z)\exp(-i\omega t), \qquad \vec{B}(z,t) = \vec{B}_0(x,y,z)\exp(-i\omega t).$$

които да удовлетворяват граничните условия на повърхността на кутията:

$$E^{\parallel} = 0, \quad B^{\perp} = 0.$$

заедно с уравненията на Максуел във вакуум. От уравненията на Максуел имаме:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}.\vec{E} &= 0 \Rightarrow \vec{\nabla}.\vec{E}_0(x,y,z) = 0; \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{E}_0(x,y,z) = i\omega\vec{B}_0(x,y,z);\\
\vec{\nabla}.\vec{B} &= 0 \Rightarrow \vec{\nabla}.\vec{B}_0(x,y,z) = 0; \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{B}_0(x,y,z) = -\frac{i\omega}{c^2}\vec{E}_0(x,y,z).
\end{aligned}$$

От уравнение $\vec{\nabla}\times\vec{E}_0 = i\omega\vec{B}_0$ се вижда, че ако знаем $\vec{E}_0$ то веднага намираме и $\vec{B}_0$ така, че нека да намерим полето $\vec{E}_0$. За целта взимаме ротация на уравнение $\vec{\nabla}\times\vec{E}_0 = i\omega\vec{B}_0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}_0\right) &= \underbrace{\vec{\nabla}.\vec{E}_0}_{=0} - \vec{\nabla}^2\vec{E}_0 = i\omega\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}_0\right) = i\omega\left(-\frac{i\omega}{c^2}\vec{E}_0\right) \Rightarrow\\
\Delta\vec{E}_0 &= -\frac{\omega^2}{c^2}\vec{E}_0
\end{aligned}$$

или по компоненти имаме:

$$\begin{aligned}\Delta E_{0x} &= -\frac{\omega^2}{c^2}E_{0x},\\ \Delta E_{0y} &= -\frac{\omega^2}{c^2}E_{0y},\\ \Delta E_{0z} &= -\frac{\omega^2}{c^2}E_{0z}.\end{aligned}$$

Решаваме горните уравнения чрез метода на разделяне на променливите, примерно взимаме уравнението за E_{0x} и търсим $E_{0x}(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z) \Rightarrow$

$$\begin{aligned}Y(y)Z(z)\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + X(x)Z(z)\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + X(x)Y(y)\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} &= -\frac{\omega^2}{c^2}X(x)Y(y)Z(z) \Rightarrow\\ \underbrace{\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}}_{=-k_x^2} + \underbrace{\frac{1}{Y(y)}\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2}}_{=-k_y^2} + \underbrace{\frac{1}{Z(z)}\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2}}_{=-k_z^2} &= -\frac{\omega^2}{c^2}\end{aligned}$$

последните независими уравнения са на хармоничен осцилатор и следователно решението се дава като:

$$E_{0x}(x,y,z) = [A\sin(k_x x) + B\cos(k_x x)][C\sin(k_y y) + D\cos(k_y y)][E\sin(k_z z) + F\cos(k_z z)]$$

от граничното условие $\vec{E}^{\parallel} = 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned}E_{0x}(x,0,z) &= E_{0x}(x,y,0) = 0 \Rightarrow D = F = 0,\\ E_{0x}(x,b,z) &= E_{0x}(x,y,d) = 0 \Rightarrow k_y = n\pi/b, \quad k_z = l\pi/d\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$E_{0x}(x,y,z) = [A\sin(k_x x) + B\cos(k_x x)]\sin(k_y y)\sin(k_z z),$$

имаме аналогично и за другите компоненти

$$\begin{aligned}E_{0y}(x,y,z) &= \sin(k_x x)[C\sin(k_y y) + D\cos(k_y y)]\sin(k_z z),\\ E_{0z}(x,y,z) &= \sin(k_x x)\sin(k_y y)[E\sin(k_z z) + F\cos(k_z z)],\\ k_x &= m\pi/a\end{aligned}$$

Сега взимаме $\vec{\nabla}.\vec{E}_0 = 0 \Rightarrow$

$$\begin{gathered}k_x[A\cos(k_x x) - B\sin(k_x x)]\sin(k_y y)\sin(k_z z) + k_y\sin(k_x x)[C\cos(k_y y) - D\sin(k_y y)]\sin(k_z z) +\\ +k_z\sin(k_x x)\sin(k_y y)[E\cos(k_z z) - F\sin(k_z z)] = 0,\end{gathered}$$

в частност ако изберем $x = 0$ имаме:

$$k_x A\sin(k_y y)\sin(k_z z) = 0 \Rightarrow A = 0.$$

Аналогично ако изберем $y = 0$ имаме $C = 0$ а от $z = 0$ имаме $E = 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned}E_{0x}(x,y,z) &= B\cos(k_x x)\sin(k_y y)\sin(k_z z),\\ E_{0y}(x,y,z) &= D\sin(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z),\\ E_{0z}(x,y,z) &= F\sin(k_x x)\sin(k_y y)\cos(k_z z).\end{aligned}$$

и

$$k_x B + k_y D + k_z F = 0,$$

Магнитното поле намираме от уравнението $\vec{\nabla}\times\vec{E}_0 = i\omega\vec{B}_0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned}B_{0x}(x,y,z) &= -\frac{i}{\omega}\left(\frac{\partial E_{0z}}{\partial y} - \frac{\partial E_{0y}}{\partial z}\right) = -\frac{i}{\omega}[k_y F\sin(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z) - k_z D\sin(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z)],\\ B_{0y}(x,y,z) &= -\frac{i}{\omega}\left(\frac{\partial E_{0x}}{\partial z} - \frac{\partial E_{0z}}{\partial x}\right) = -\frac{i}{\omega}[k_z B\cos(k_x x)\sin(k_y y)\cos(k_z z) - k_x F\cos(k_x x)\sin(k_y y)\cos(k_z z)],\\ B_{0z}(x,y,z) &= -\frac{i}{\omega}\left(\frac{\partial E_{0y}}{\partial x} - \frac{\partial E_{0x}}{\partial y}\right) = -\frac{i}{\omega}[k_x D\cos(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z) - k_y B\cos(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z)].\end{aligned}$$

което автоматично удовлетворява граничните условия $\vec{B}^{\perp} = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} B_{0x}(0, y, z) &= B_{0x}(a, y, z) = 0, \\ B_{0y}(x, 0, z) &= B_{0y}(x, b, z) = 0, \\ B_{0z}(x, y, 0) &= B_{0z}(x, y, d) = 0. \end{aligned}$$

както и условието $\vec{\nabla}.\vec{B}_0 = 0$ понеже вълновите числа трябва да удовлетворяват

$$\begin{aligned} -\frac{\omega^2}{c^2} &= -k_x^2 - k_y^2 - k_z^2 \Rightarrow \\ \omega &= c\pi\sqrt{(l/d)^2 + (m/a)^2 + (n/b)^2} \end{aligned}$$

1.2

Решаваме уравнението на Лаплас в цилиндрични координати и отчитаме, че за безкрайно дълъг проводник резултата не трябва да зависи от координатата $z \Rightarrow$

$$\Delta V = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 0$$

след разделяне на променливите в последното уравнение имаме решение, което се дава като:

$$V = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^m [A_m \cos(m\theta) + B_m \sin(m\theta)]$$

коефициентите A_m и B_m ще намерим от граничните условия върху двете повърхнини на цилиндричният проводник. Понеже при $r = a$ имаме $V(-\theta) = V(\theta)$ (виж фиг 2) то следва, че $B_m = 0$. Коефициентите A_m ще намерим като $V(a, \theta)$ умножим с $\cos(n\theta)$ (при $n \neq 0$) и интегрираме по $\theta \Rightarrow$

$$\int_0^{2\pi} V\cos(n\theta)\, d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} V_1 \cos(n\theta)\, d\theta + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} V_2 \cos(n\theta)\, d\theta = \frac{2(V_1 - V_2)}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

а отчитайки, че $\int_0^{2\pi} \cos(m\theta)\cos(n\theta)\, d\theta = \pi\delta_{m,n} \Rightarrow$

$$A_n = \frac{2(V_1 - V_2)}{\pi n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

а при $n = 0 \Rightarrow A_0 = \frac{V_1 + V_2}{2}$ или окончателно имаме

$$V = \frac{V_1 + V_2}{2} + 2\frac{V_1 - V_2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n - 1} \left(\frac{r}{a}\right)^{2n-1} \cos[(2n-1)\theta]$$

1.3

Най-бързият път от точка А до огледалото и от точка В до огледалото са прави линии. Единственият въпрос е, къде върху огледалото трябва да бъде точката на отражение С? Нека x да е хоризонталното разстояние от точка А до точка на отражение С. Времето за което лъчът пътува от А до С е $t_1 = AB/c$, а времето за което лъча стига от точка С до точка В е $t_2 = BC/c$, където c е скоростта на светлината във вакуум. Тогава пълното време е:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{AB}{c} + \frac{BC}{c} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{c} + \frac{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}{c}, \tag{2}$$

търсим екстремалното врем $\Rightarrow$

$$\frac{dt}{dx} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{c\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{d - x}{c\sqrt{b^2 + (d-x)^2}} = 0,$$

като последното равенство можем да запишем като:

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{d - x}{c\sqrt{b^2 + (d-x)^2}} \Leftrightarrow \sin\alpha = \sin\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta.$$

1.4

Най-бързият път във всякаква среда е права линия. Единственият въпрос е, къде на границата между двете среди трябва да бъде точката на пречупване C? Нека с x да означим хоризонталното разстояние от точка A до точка на пречупване C. Времето за което светлината стига от A до B е:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{AB}{v_1} + \frac{BC}{v_2} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}{v_2}, \tag{3}$$

търсим екстремалното врем $\Rightarrow$

$$\frac{dt}{dx} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{v_1\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{d-x}{v_2\sqrt{b^2 + (d-x)^2}} = 0,$$

като последното равенство можем да запишем като:

$$\frac{x}{v_1\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{d-x}{v_2\sqrt{b^2 + (d-x)^2}} \Leftrightarrow \frac{1}{v_1}\sin\alpha = \frac{1}{v_2}\sin\beta \Leftrightarrow \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1}.$$

1.5

Решава се като ползваме закона на Снелиус.

1.6

Нека $y(x)$ е търсената крива. При движението си по кривата пръстенчето има скорост $v = \sqrt{2gy}$. Тъй като търсим крива, по която движението се извършва за най-кратко време, ще направим аналогия с принципа на Ферма:

Ще разгледаме движението на пръстенчето като движение на светлинен лъч в среда с показател на пречупване, пропорционален на $y^{-1/2}$. Тогава скоростта на лъча ще е пропорционална на $y^{1/2}$. Оптично нееднородната среда можем да разгледаме като съвкупност от оптично еднородни хоризонтални слоеве с различни показатели на пречупване. Поради пречупване на границата между слоевете лъча се закривява, като от слой към слой спазва закона на Снелиус $\Rightarrow$

$$n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2 = \ldots = n \sin\alpha = const,$$

където ъгъла α е ъгъла на падане върху произволен избран слой с показател на пречупване n. От друга страна имаме $n = ay^{-1/2}$, където a е константа, и $\cot\alpha = dy/dx \Rightarrow$

$$\begin{aligned} n\sin\alpha &= \frac{a}{\sqrt{y\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}} = const \Rightarrow \\ y\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] &= const \end{aligned}$$

деференцираме последният израз по $x \Rightarrow$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2y\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + 1 = 0$$

Тази задача е известна като Брахистохрона и е била поставена през 1696 от Бернули
`http://en.wikipedia.org/wiki/Brachistochrone_curve`.
Блиска задача до задачата за Брахистохроната е задачата за Таутохрона
`http://en.wikipedia.org/wiki/Tautochrone_curve`.