Електродинамика

Андон Рангелов, кабинет В 39, email: rangelov@phys.uni-sofia.bg, интернет страница на курса http://ed.quantum-bg.org/

0.1 Преговор от векторния анализ

Многократни произведения

В много от задачите, които ще решаваме през годината ще ползваме следните свойства:

$$A.B = B.A \tag{1}$$

$$A \times B = -B \times A \tag{2}$$

$$A \times A = 0 \tag{3}$$

$$(A.B)\,C = A.\,(BC) \tag{4}$$

$$(A \times B)\,.C = A.\,(B \times C) \tag{5}$$

$$A \times (B \times C) = B\,(A.C) - C\,(A.B) \tag{6}$$

$$(A \times B)\,.\,(C \times D) = (A.C)\,(B.D) - (A.D)\,(B.C) \tag{7}$$

$$(A.\Phi)\,.B = A.\,(\Phi.B) = A.\Phi.B \tag{8}$$

$$(A \times \Phi)\,.B = A.\,(\Phi \times B) \tag{9}$$

където A, B, C, D са вектори, а Φ тензор. Ако изрично не е казано, то се подразбира следното правило: вектори пишем с големи латински букви, скаларите с малки гръцки букви, а тензори с големи гръцки букви.

Ортогонални координатни системи

В произволна ортогонална координатна система (с координати q_1, q_2, q_3) квадрата на дължината се задава с формулата:

$$dl^2 = h_1^2 dq_1^2 + h_2^2 dq_2^2 + h_3^2 dq_3^2, \tag{10}$$

а обема с формулата:

$$dV = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3, \tag{11}$$

където h_i са коефициенти на Ламе и се дават с

$$h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}. \tag{12}$$

Различните диференциални операции се записват така:

$$(\nabla\varphi)_i = (\mathsf{grad}\varphi)_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}; \tag{13}$$

$$\nabla.A = \quad \mathsf{div}A = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial q_2}(h_1 h_3 A_2) + \frac{\partial}{\partial q_3}(h_1 h_2 A_3)\right]; \tag{14}$$

$$\nabla \times A = \mathsf{rot}A = \begin{vmatrix} \frac{\mathsf{e}_1}{h_2 h_3} & \frac{\mathsf{e}_2}{h_1 h_3} & \frac{\mathsf{e}_3}{h_2 h_1} \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}; \tag{15}$$

$$\Delta\varphi = \nabla^2\varphi = \nabla.\nabla\varphi = \quad \mathsf{div}\,(\mathsf{grad}\varphi) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_1 h_3}{h_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3}\right)\right]; \tag{16}$$

където A и ∇ са вектори, а φ е скалар.

Декартови координати

В Декартова координатна система имаме: $h_x = 1, h_y = 1, h_z = 1$ следователно набла оператора е

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right), \tag{17}$$

а оператора на Лаплас е

$$\Delta = \nabla^2 = \nabla.\nabla = \mathsf{div}\,(\mathsf{grad}) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{18}$$

Сферични координати

В сферична координатна система имаме:

$$x = r\sin\vartheta\cos\alpha, \quad y = r\sin\vartheta\sin\alpha, \quad z = r\cos\vartheta; \tag{19}$$

$$h_r = 1, \quad h_\vartheta = r, \quad h_\alpha = r\sin\vartheta; \tag{20}$$

следователно различните диференциални операции в сферична координатна система се записват така:

$$\nabla\varphi = \mathsf{grad}\varphi = \mathsf{e}_r\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \mathsf{e}_\vartheta\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} + \mathsf{e}_\alpha\frac{1}{r\sin\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}; \tag{21}$$

$$\nabla.A = \mathsf{div}A = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(A_\vartheta\sin\vartheta\right) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial A_\alpha}{\partial\alpha}; \tag{22}$$

$$(\nabla\times A)_r = (\mathsf{rot}A)_r = \frac{1}{r\sin\vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(A_\alpha\sin\vartheta\right) - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial\alpha}\right]; \tag{23}$$

$$(\nabla\times A)_\vartheta = (\mathsf{rot}A)_\vartheta = \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial A_r}{\partial\alpha} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\alpha\right); \tag{24}$$

$$(\nabla\times A)_\alpha = (\mathsf{rot}A)_\alpha = \frac{1}{r}\frac{\partial\left(rA_\vartheta\right)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\vartheta}; \tag{25}$$

$$\Delta\varphi = \nabla^2\varphi = \mathsf{div}\,(\mathsf{grad}\varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2}; \tag{26}$$

Цилиндрични координати

В цилиндрична координатна система имаме:

$$x = r\cos\alpha, \quad y = r\sin\alpha, \quad z = z; \tag{27}$$

$$h_r = 1, \quad h_\alpha = r, \quad h_z = 1; \tag{28}$$

следователно различните диференциални операции в цилиндрична координатна система се записват така:

$$\nabla\varphi = \mathsf{grad}\varphi = \mathsf{e}_r\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \mathsf{e}_\alpha\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \mathsf{e}_z\frac{\partial\varphi}{\partial z}; \tag{29}$$

$$\nabla.A = \mathsf{div}A = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_r\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\alpha}{\partial\alpha} + \frac{\partial A_z}{\partial z}; \tag{30}$$

$$(\nabla\times A)_r = (\mathsf{rot}A)_r = \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial z}; \tag{31}$$

$$(\nabla\times A)_\alpha = (\mathsf{rot}A)_\alpha = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}; \tag{32}$$

$$(\nabla\times A)_z = (\mathsf{rot}A)_z = \frac{1}{r}\frac{\partial\left(rA_\alpha\right)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\alpha}; \tag{33}$$

$$\Delta\varphi = \nabla^2\varphi = \quad \mathsf{div}\left(\mathsf{grad}\varphi\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}; \tag{34}$$

Задачи:

1.1 Докажете тъждествата:

$$(1.1.1)\quad \mathsf{rot}\left(\mathsf{grad}\varphi\right) = 0$$

$$(1.1.2)\quad \mathsf{div}\left(\mathsf{rot}A\right) = 0$$

$$(1.1.3)\ \mathsf{grad}\left(\varphi\psi\right) = \varphi\mathsf{grad}\psi + \psi\mathsf{grad}\varphi$$

$$(1.1.4)\quad \mathsf{div}\left(\varphi A\right) = \varphi\quad \mathsf{div}A + A.\mathsf{grad}\varphi$$

$$(1.1.5)\ \mathsf{rot}\left(\varphi A\right) = \varphi\mathsf{rot}A - A\times\mathsf{grad}\varphi$$

$$(1.1.6)\quad \mathsf{div}\left(A\times B\right) = B.\mathsf{rot}A - A.\mathsf{rot}B$$

$$(1.1.7)\ \mathsf{rot}\left(A\times B\right) = A\quad \mathsf{div}B - B\quad \mathsf{div}A + B.\mathsf{grad}A - A.\mathsf{grad}B$$

$$(1.1.8)\ \mathsf{grad}\left(A.B\right) = A\times\mathsf{rot}B + B\times\mathsf{rot}A + B.\mathsf{grad}A + A.\mathsf{grad}B$$

1.2 Пресметнете в Декартова координатна система за радиус вектора $\mathbf{r}$ ($\mathbf{r} = (x, y, z)$):

$$(1.2.1)\quad \mathsf{div}\mathbf{r}$$

$$(1.2.2)\ \ \mathsf{rot}\mathbf{r}$$

$$(1.2.3)\ \ \mathsf{grad}\mathbf{r}$$

1.3 Използвайки равенството $\mathsf{grad}(\varphi\left(u\right)) = \frac{d\varphi}{du}\mathsf{grad}u$, пресметнете в Декартова координатна система:

$$(1.3.1)\ \ \mathsf{grad}\varphi\left(r\right)$$

$$(1.3.2)\quad \mathsf{div}\left(\varphi\left(r\right)\mathbf{r}\right)$$

$$(1.3.3)\ \ \mathsf{rot}\left(\varphi\left(r\right)\mathbf{r}\right)$$

1.4 Намерете функцията $\varphi\left(r\right)$, която удовлетворява $\mathsf{div}\left(\varphi\left(r\right)\mathbf{r}\right) = 0$

1.5 Намерете общия вид на решението за уравнението на Лаплас ($\nabla.\nabla\varphi = \nabla^2\varphi = \Delta\varphi = 0$) в сферични координати, за скаларна функция φ, зависеща само от:

1.5.1 r

1.5.2 α

1.5.3 ϑ

1.6 Намерете общия вид на решението за уравнението на Лаплас ($\nabla.\nabla\varphi = \nabla^2\varphi = \Delta\varphi = 0$) в цилиндрични координати, за скаларна функция φ, зависеща само от:

1.6.1 r

1.6.2 α

1.6.3 z

1.7 Докажете тъждеството:

$$\Delta A = -\nabla\times\left(\nabla\times A\right) + \nabla\left(\nabla.A\right) \tag{35}$$

1.8 Ако $A^2 = const$, то докажете тъждеството:

$$\left(A.\nabla\right)A = -A\times\mathsf{rot}A \tag{36}$$

Решения:

1.1.1

$$\mathsf{rot}\left(\mathsf{grad}\varphi\right)=\nabla\times\left(\nabla\varphi\right)=\underbrace{\nabla\times\nabla}_{=0}\left(\varphi\right)=0$$

Следствие от задачата: ако $\mathsf{rot}\left(U\right)=0$, то можем да представим $U=\mathsf{grad}\varphi$. Такива полета се наричат консервативни, пример за тях са електростатичното (без магнитна съставяща) и гравитационното.

1.1.2

$$\mathsf{div}\left(\mathsf{rot}A\right)=\nabla.\left(\nabla\times A\right)=\underbrace{\left(\nabla\times\nabla\right)}_{=0}.A=0$$

Следствие от задачата: Ако $\mathsf{div}U=0$, то можем да представим $U=\nabla\times V$. Такива полета се наричат соленоидални, на пример магнитното поле.

Всяко векторно поле може да се представи като сума от соленоидално поле и консервативно (фундаментална теорема на векторната алгебра-Теорема на Хелмхолзц)

1.1.3

$$\mathsf{grad}\left(\varphi\psi\right)=\nabla\left(\varphi\psi\right)=\nabla\left(\varphi_c\psi\right)+\nabla\left(\varphi\psi_c\right)=\varphi_c\nabla\left(\psi\right)+\psi_c\nabla\left(\varphi\right)=\varphi\nabla\psi+\psi\nabla\varphi$$

1.1.4

$$\mathsf{div}\left(\varphi A\right)=\nabla.\left(\varphi A\right)=\nabla.\left(\varphi_c A\right)+\nabla.\left(\varphi A_c\right)=\varphi_c\nabla.A+\left(\varphi A_c\right).\nabla=\varphi_c\nabla.A+A_c.\nabla\varphi=\varphi\nabla.A+A.\nabla\varphi$$

1.1.5

$$\mathsf{rot}\left(\varphi A\right)=\nabla\times(\varphi A)=\nabla\times(\varphi_c A)+\nabla\times(\varphi A_c)=\varphi_c\nabla\times A-(\varphi A_c)\times\nabla=\varphi_c\nabla\times A-A_c\times\nabla\varphi=\varphi\nabla\times A-A\times\nabla\varphi$$

1.1.6

$$\begin{aligned}\mathsf{div}\left(A\times B\right)&=\nabla.\left(A\times B\right)=\nabla.\left(A_c\times B\right)+\nabla.\left(A\times B_c\right)=-\nabla.\left(B\times A_c\right)+\left(\nabla\times A\right).B_c=\\&=\left(\nabla\times A\right).B_c-\left(\nabla\times B\right).A_c=B_c.\left(\nabla\times A\right)-A_c.\left(\nabla\times B\right)\end{aligned}$$

1.1.7

$$\begin{aligned}\mathsf{rot}\left(A\times B\right)&=\nabla\times\left(A\times B\right)=\nabla\times\left(A_c\times B\right)+\nabla\times\left(A\times B_c\right)=A_c\left(\nabla.B\right)-B\left(\nabla.A_c\right)+\\+A\left(\nabla.B_c\right)-B_c\left(\nabla.A\right)&=A_c\left(\nabla.B\right)-\left(A_c.\nabla\right)B+\left(B_c.\nabla\right)A-B_c\left(\nabla.A\right)=A\nabla.B-B\nabla.A+B.\nabla A-A.\nabla B\end{aligned}$$

1.1.8

$$\nabla\left(A.B\right)=\nabla\left(A_c.B\right)+\nabla\left(A.B_c\right)$$

$$\begin{aligned}\nabla\left(A_c.B\right)&=A_c\times\left(\nabla\times B\right)+\left(A_c.\nabla\right)B\\\nabla\left(A.B_c\right)&=B_c\times\left(\nabla\times A\right)+\left(B_c.\nabla\right)A\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\nabla\left(A.B\right)=A_c\times\left(\nabla\times B\right)+\left(A_c.\nabla\right)B+B_c\times\left(\nabla\times A\right)+\left(B_c.\nabla\right)A$$

1.2.1

$$\mathsf{div}\left(\mathbf{r}\right)=\nabla.\mathbf{r}=\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}=3$$

1.2.2

$$\mathsf{rot}\mathbf{r}=\nabla\times\mathbf{r}=\begin{vmatrix}\mathsf{e}_x & \mathsf{e}_y & \mathsf{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x & y & z\end{vmatrix}=\mathsf{e}_x\left(\frac{\partial}{\partial y}z-\frac{\partial}{\partial z}y\right)+\mathsf{e}_y\left(\frac{\partial}{\partial z}x-\frac{\partial}{\partial x}z\right)+\mathsf{e}_z\left(\frac{\partial}{\partial x}y-\frac{\partial}{\partial y}x\right)=(0,0,0)$$

1.3.1

$$\mathsf{grad}\varphi\left(r\right)=\frac{d\varphi\left(r\right)}{dr}\mathsf{grad}r$$

нека сега пресметнем $\mathsf{grad}r$

$$\begin{aligned}\left(\mathsf{grad}r\right)_x &= \frac{d\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}{dx}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r}\\ \left(\mathsf{grad}r\right)_y &= \frac{d\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}{dy}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{y}{r}\\ \left(\mathsf{grad}r\right)_z &= \frac{d\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}{dz}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{z}{r}\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\mathsf{grad}r=\frac{\mathbf{r}}{r}$$

$\Rightarrow$

$$\mathsf{grad}\varphi\left(r\right)=\frac{d\varphi\left(r\right)}{dr}\mathsf{grad}r=\frac{\mathbf{r}}{r}\frac{d\varphi\left(r\right)}{dr}$$

1.3.2

$$\begin{aligned}\mathsf{div}\left(\varphi\left(r\right)\mathbf{r}\right) &= \nabla.\left(\varphi\left(r\right)\mathbf{r}\right)=\nabla.\left(\varphi_c\left(r\right)\mathbf{r}\right)+\nabla.\left(\varphi\left(r\right)\mathbf{r}_c\right)=\varphi_c\left(r\right)\nabla.\mathbf{r}+\left(\nabla.\mathbf{r}_c\right)\varphi\left(r\right)=\\ \varphi_c\left(r\right)\nabla.\mathbf{r}+\left(\mathbf{r}_c.\nabla\right)\varphi\left(r\right) &= \varphi\left(r\right)\underbrace{\nabla.\mathbf{r}}_{=3}+\mathbf{r}.\underbrace{\nabla\varphi\left(r\right)}_{=\frac{\mathbf{r}}{r}\frac{d\varphi(r)}{dr}}=3\varphi\left(r\right)+r\frac{d\varphi\left(r\right)}{dr}\end{aligned}$$

1.3.3

$$\begin{aligned}\nabla\times\left(\varphi\left(r\right)\mathbf{r}\right) &= \varphi\left(r\right)\underbrace{\nabla\times\mathbf{r}}_{=0}-\mathbf{r}\times\nabla\varphi\left(r\right)=\\ &= \underbrace{-\mathbf{r}\times\frac{\mathbf{r}}{r}}_{=0}\frac{d\varphi\left(r\right)}{dr}=0\end{aligned}$$

1.4

от предишната задача ползваме

$$\mathsf{div}\left(\varphi\left(r\right)\mathbf{r}\right)=3\varphi\left(r\right)+r\frac{d\varphi\left(r\right)}{dr}$$

$\Rightarrow$ търсим решение на уравнението $3\varphi\left(r\right)+r\frac{d\varphi(r)}{dr}=0$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow\quad -3\frac{dr}{r}=\frac{d\varphi}{\varphi}\\
&\Rightarrow\quad -3\ln r=\ln\varphi-const\\
&\Rightarrow\quad \ln r^{-3}=\ln\frac{\varphi}{const}\\
&\Rightarrow\quad \varphi=\frac{const}{r^3}
\end{aligned}$$

1.5

От оператора на Лаплас в сферични координати имаме

$$\Delta\varphi=\nabla^2\varphi=\quad\mathsf{div}\left(\mathsf{grad}\varphi\right)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2};$$

$\Rightarrow$

1.5.1

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow\quad \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)=0\\
&\Rightarrow\quad \frac{2r}{r^2}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}=0\\
&\Rightarrow\quad \frac{\partial\varphi}{\partial r}=const.r^{-2}\\
&\Rightarrow\quad \varphi=const_1+const_2/r
\end{aligned}$$

1.5.2

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow\quad \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2}=0\\
&\Rightarrow\quad \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}=const\\
&\Rightarrow\quad \varphi=const_1+const_2\alpha
\end{aligned}$$

1.5.3

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\right)=0\\
&\Rightarrow \quad \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\vartheta^2}=0\\
&\Rightarrow \quad \ln\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\right)-\ln const=-\int\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\partial\vartheta=-\int\frac{\partial\sin\vartheta}{\sin\vartheta}=-\ln\left(\sin\vartheta\right)\\
&\Rightarrow \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}=\frac{const}{\sin\vartheta}\Rightarrow\varphi=const_1+const_2\int\frac{\partial\vartheta}{\sin\vartheta}=const_1+const_2\int\frac{\partial\vartheta}{2\sin\left(\vartheta/2\right)\cos\left(\vartheta/2\right)}=\\
&= \quad const_1+const_2\int\frac{\partial\vartheta}{2\tan\left(\vartheta/2\right)\cos^2\left(\vartheta/2\right)}=const_1+const_2\int\frac{\partial\tan\left(\vartheta/2\right)}{\tan\left(\vartheta/2\right)}\Rightarrow\\
\varphi &= \quad const_1+const_2\ln\left(\tan\left(\vartheta/2\right)\right)
\end{aligned}
$$

1.6

От оператора на Лаплас в цилиндрични координати имаме

$$\Delta\varphi=\nabla^2\varphi=\quad \mathsf{div}\left(\mathsf{grad}\varphi\right)=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2};$$

$\Rightarrow$

1.6.1

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)=0\\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}=0\\
&\Rightarrow \quad \frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{const}{r}\\
&\Rightarrow \quad \varphi=const_1+const_2\ln r
\end{aligned}
$$

1.6.2

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2}=0\\
&\Rightarrow \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}=const\\
&\Rightarrow \quad \varphi=const_1+const_2\alpha
\end{aligned}
$$

1.6.3

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0\\
&\Rightarrow \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z}=const\\
\varphi &= \quad const_1+const_2 z
\end{aligned}
$$

1.7

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times A) &= \nabla (\nabla . A) - (\nabla . \nabla) A \\ &\Rightarrow (\nabla . \nabla) A = \Delta A = -\nabla \times (\nabla \times A) + \nabla (\nabla . A) \end{aligned}$$

1.8

$$\begin{aligned} A \times (\nabla \times B) &= \nabla (B.A) - (A.\nabla) B = (\nabla B) . A - A. (\nabla B) \\ B &= A \Rightarrow A \times (\nabla \times A) = (\nabla A) . A - A. (\nabla A) \end{aligned}$$

от $A^2 = const \Rightarrow \nabla (A.A) = 0$, но $\nabla (A.A) = (\nabla A) . A + (\nabla A) . A = 2 (\nabla A) . A \Rightarrow (\nabla A) . A = 0$ окончателно $\Rightarrow$

$$A. (\nabla A) = -A \times (\nabla \times A) + (\nabla A) . A = -A \times \mathsf{rot} A$$